SPLİNE İNTERPOLASYONU

Astronomide veri analizi yaparken ve görüntü işlemede oldukça sık kullanılan bir intepolasyon yöntemi **spline interpolasyonu** olarak bilinen yöntemdir. Bu yöntemde eldeki veri setine tek bir fonksiyon uyumlamak (fit etmek) yerine her aralığa birbirinden farklı birer polinom uyumlanır. Zira düşük dereceden polinomlarla her değişimi temsil etmek oldukça güçtür, yüksek dereceden polinomlarla ise her değişim temsil edilebilmekle birlikte veri setindeki her bir aralık için değişimin yüksek dereceden bir polinomun ön gördüğü değişime yakın olup olmadığını bilmek ya da denetlemek mümkün olmaz. Oysa spline interpolasyonları ile eldeki veri setinin tüm noktalarından geçen ve düşük dereceden polinomların yapısına uygun olarak düzgün değişen fonksiyonlarla, sürekli bir uyumlama elde etmek ve buna dayalı olarak ara değer hesabı yapmak mümkündür. Bu nedenle spline interpolasyonları geniş bir uygulama alanına sahiptir ve IRAF gibi görüntü işleme ve veri analizi programlarında sıklıkla kullanılmaktadır. Bu bölümde lineer (birinci dereceden, doğrusal), kuadratik (ikinci dereceden) ve kübik (üçüncü dereceden) spline interpolasyonlarını görecek ve temel mantığını anlamaya calışacağız. Lineer ve kuadratik spline interpolasyonları pratikte kullanılmamakla birikte, sık kullanılan kübik spline interpolasyonunu anlamak açısından pedagojik bir olanak sağlar. Bu nedenle bölüme lineer (doğrusal) spline interpolasyonları ile giriş yapacağız.

1. Lineer Spline İnterpolasyonu

Diyelim ki elimizde $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_i, x_{,+1}, \ldots, x_n$ noktalarına karşılık $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_i, f_{,+1}, \ldots, f_n$ ölçümleri olsun ve lineer interpolasyon yöntemliyle her bir aralıktaki keyfi seçilmiş bir x değeri için F(x) aradeğerini arıyor olalım. Bu durumda elimizdeki nokta ikililerini kullanarak her bir aralık için ayrı bir doğru denklemi belirlemeliyiz. Bu doğru denklemi herhangi (x_i, f_i), (x_{i+1}, f_{i+1}) ikilisi için

$$s_i(x) = f_i + \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) \quad (1.1)$$

şeklinde olacaktır. İnterpolasyon için bu $s_i(x)$ fonksiyonlarını belirleyip, aradeğer aradığımız x hangi aralıkta ise o aralık için belirlediğimiz lineer spline fonksiyonunda ($s_i(x)$) bu x değerini yerine koyarak F(x) aradeğerini hesaplamalıyız.

Örnek 1. Aşağıdaki ölçümleri ve lineer (doğrusal) spline interpolasyonunu kullanarak x = 5 değeri için aradeğer hesabı yapınız.

i	$\mathbf{x_i}$	$\mathbf{f_i}$
0	3.0	2.5
1	4.5	1.0
2	7.0	2.5
3	9.0	0.5

Çözüm: $x_1 = 4.5 < x = 5 < x_2 = 7.0$ olduğu için aslında $s_1(x)$ fonksiyonunu hesaplayıp x yerine 5 koymamız aradığımız aradeğeri bulmamızı sağlayacaktır. Ancak biz öğretici olması açısından tüm aralıklar için $s_i(x)$ fonksiyonlarını arayalım ve sonuçlarımızı da bir grafik üzerinde gösterelim.

Öncelikle (x_0, f_0), (x_1, f_1) ikilsini kullanarak $s_0(x)$ fonksiyonunu (1.1) eşitliğini kullanarak hesaplayalım.

$$s_0(x) = f_0 + \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) = 2.5 + \frac{1.0 - 2.5}{4.5 - 3.0}(x - 3.0) = -x + 5.5$$

Şimdi sırayla diğer nokta ikililerini yine (1.1) eşitliğinde yerine koyarak tüm $s_i(x)$ fonksiyonlarını bulalım

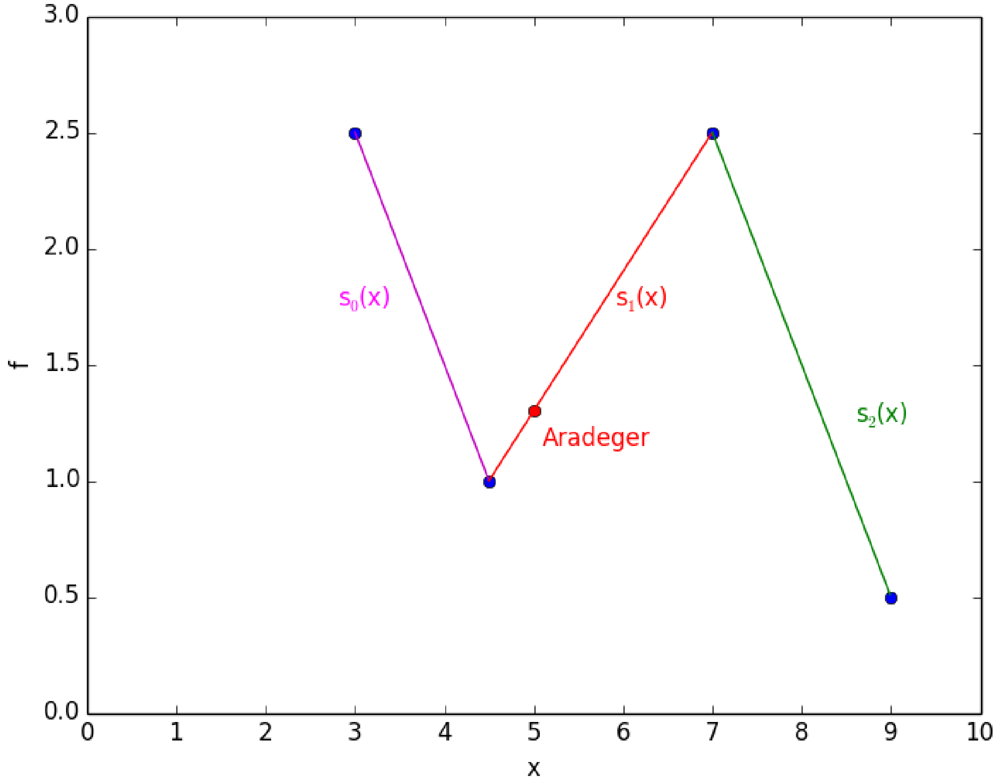
$$s_1(x) = f_1 + \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) = 1.0 + \frac{2.5 - 1.0}{7.0 - 4.5}(x - 4.5) = 0.6x - 1.7$$

$$s_2(x) = f_2 + \frac{f_3 - f_2}{x_3 - x_2}(x - x_2) = 2.5 + \frac{0.5 - 2.5}{9.0 - 7.0}(x - 7.0) = -x + 9.5$$

Aradığımız aradeğer $x_1 = 4.5 < x = 5 < x_2 = 7.0$ aralığında olduğundan x=5'i $s_1(x)$ fonksiyonunda x yerine koymalıyız.

$s_1(x) = 0.6x - 1.7 \Rightarrow s_2(x) = 0.6 * 5 - 1.7 = 1.3$ değeri bulunmuş olur.

Sonuçlarımızı bir grafik üzerinde (Şekil 1) gösterip yorumlamaya çalışalım. Şekilden de kolayca anlaşılabileceği gibi lineer spline interpolasyonu ile doğrusal interpolasyon arasında hiçbir fark yoktur. Lineer spline interpolasyonu, düğüm noktalarında çok ani değişimlere neden olduğu gerekçesiyle dezavantajlıdır. Doğrusal interpolasyon ya da lineer spline interpolasyonu ancak değişimin gerçekten doğrusal ya da doğrusala çok yakın olduğu aralıklar için doğru sonuç verir.



Şekil 1. Lineer Spline İnterpolasyonu.
Mavi noktalar verilen, kırmızı ise interpolasyonla hesaplanan noktayı göstermektedir.

2. Kuadratik (İkinci Dereceden) Spline İnterpolasyonu

Kuadratik spline interpolasyonunda, lineer spline interpolasyonundan farklı olarak bu kez verilen noktalar için her aralığa ikinci dereceden bir polinom (parabol) uyumlamaya çalışırız. Ancak verilen herhangi iki noktadan yalnız ve yalnızca bir doğru geçerken, sonsuz sayıda ikinci dereceden polinom geçer. Bu nedenle uyumlayacağımız polinomları tekil hale getirmek için bazı şartlar koymamız gerekir. Uyumlayacağımız polinomların yapısı;

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 \quad (2.1)$$

şeklinde olmalıdır. Verilen n tane nokta için (n-1) tane aralık olacak, her aralığa bir tane parabol uyarlayacağımız için de (n-1) tane $s_i(x)$ fonksiyonu olacak demektir. Bu fonksiyonları belrilemek için, her bir fonksiyon 3 katsayı (a_i, b_i, c_i) içereceğinden 3 (n-1) adet katasayıyı belirlemek gereklidir. Bu da 3 (n-1) tane denkleme ihtiyaç duyduğumuz anlamına gelir. Her bir polinomu tekilleştirmek için koyacağımız şartlar bize toplamda 3 (n-1) adet denklem vermelidir ki biz bu katsayıları bulup, her aralık için bir ikinci dereceden polinom belirlemiş olalım.

Şart 1. Fonksiyon her noktadan geçmeli yani verilen herhangi bir “i” noktasından da geçmelidir.

Bu şart “i” noktasının koordinatlarının (x_i, f_i) “i.” aralık için verilen $s_i(x)$ fonksiyonunu sağlaması anlamına gelir. Bu şartı matematiksel olarak ifade edersek;

$$s_i(x_i) = a_i + b_i(x_i - x_i) + c_i(x_i - x_i)^2 = f_i \quad (2.2)$$

olmasını gerektirir. ($x_,$ - $x_,$) içeren terimler 0 (sıfır) olacağından bu şart bizi

$$a_i = f_i \quad (2.3)$$

sonucuna götürür. Yani her polinomun birinci katsayısı, o poinomun uyarlandığı aralığın başındaki f değerine eşit alınmalıdır.

Birinci katasayıların tamamını bulmuş olmamız bize (n-1) adet denklem sağlamış olur. Böylece başlangıçtaki 3 (n-1) denklem bulma zorunluluğumuz, 2 (n-1) denklem bulmaya indirgenmiş olur.

Şart 2. Düğüm noktalarında (ilk ve son nokta dışındaki tüm noktalar) komşu iki kuadratik polinomun (parabolün) değerleri eşit olmalı ($s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1})$) ve bu değerler o nokta için verilen (f_{i+1}) değere eşit olmalıdır. Bu şartı matematiksel olarak ifade edersek;

$$\begin{aligned} s_i(x_{i+1}) &= a_i + b_i(x_{i+1} - x_i) + c_i(x_{i+1} - x_i)^2 = \\ s_{i+1}(x_{i+1}) &= a_{i+1} + b_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1}) + c_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1})^2 = f_{i+1} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Burada, $x_{i+1} - x_i = h_i$ olsun. $x_{i+1} - x_{i+1} = 0$ olacağından, bu terimleri yerine yerleştirirsek;

$$a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 = a_{i+1} = f_{i+1}$$

bulunur. Eşitliğin $a_{i+1} = f_{i+1}$ şeklindeki ikinci kısmı, zaten bir önceki şartın bir sonucudur. Burada önemli olan eşitliğin birinci kısmıdır.

$$a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 = f_{i+1} \ (2.5)$$

Bu ifade bize h_i ve f_{i+1} değerlerini bildiğimizden a_i, b_i, c_i katsayıları arasında bir ilişki sağlar. Bu ilişki (n-1) tane daha denklem demektir. 1. şartın sonunda 2 (n-1)’e indirdiğimiz koşul sayısı böylece (n-1)’e inmiş olur.

Şart 3. Düğüm noktalarındaki birinci türevler eşit olmalıdır ki birbiri ardına gelen interpolasyon fonksiyonları arasında ani değişimler oluşmasın. Bu koşulu koymazsak düğüm noktalarında komşu iki fonksiyonun türevleri eşit olmayacağı için ani değişimlerden kaçınamayız. Bu da lineer spline interpolasyonundaki benzer bir dezavantaja neden olur. Komşu iki kuadratik spline fonksiyonunun türevlerinin eşitliği şartını matematiksel olarak ifade edersek;

$$s_i'(x_{i+1}) = b_i + 2c_i(x_{i+1} - x_i) = s_{i+1}'(x_{i+1}) = b_{i+1} + 2c_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1})^{\cancel{2}} \quad (2.6)$$

Yine , $x_{i+1} - x_i = h_i$ ve $x_{i+1} - x_{i+1} = 0$ olacağından,

$$b_i + 2c_i h_i = b_{i+1} \quad (2.7)$$

bulunmuş olur.

Burada b_i ve c_i birbirlerine bağlanmaktadır. Ancak, bu iki katsayı (i+1). aralık için "b" katsayısı bilinirse bulunabilir. Bu da (n-1) değil (n-2) denklem bulabildiğimiz anlamına gelir. Böylece (n-1) – (n-2) = 1 denklem daha bulmamız gerektiği ortaya çıkar. Bu durum bir şart daha koymamızı gerektirir.

Şart 4. İlk noktadaki ikinci türevin 0 (sıfır) olduğunu varsayalım ($s''(x_0) = 0$). İlk noktadan önceki değişimle ilgilenmediğimiz için bu varsayım bize bir şey kaybettirmez. Ne kazandırdığına matematiksel ifadesini yazarak bakalım.

$$s''(x_0) = 0 \Rightarrow c_0 = 0 \quad (2.8)$$

Buradan yalnızca bir katsayı (tüm c_i'leri değil sadece c_1'i bulduğumuza dikkat ediniz) elde etmiş oluruz. Ancak bu eksik kalan 1 koşulumuzu tamamlar. (2.3), (2.5), (2.7) ve (2.8) denklemleri toplamda 3 (n-1) denkleme gelir ki verilen noktaları kullanarak bu denklemleri çözmemiz aradığımız 3 (n-1) katsayıyı sağlayacaktır. Böylece tüm aralıklar için birer (bir ve yalnız birer) tane kuadratik polinom elde etmiş oluruz.

Örnek 2. Aşağıdaki ölçümleri ve kuadratik (ikinci dereceden) spline interpolasyonunu kullanarak x = 5 değeri için aradeğer hesabı yapınız.

i	**x_i**	**f_i**
0	3.0	2.5
1	4.5	1.0
2	7.0	2.5
3	9.0	0.5

Çözüm. (2.3) numaralı denklemle ifade edilen birinci şart bize a katsayılarını verecektir.

$$a_0 = f_0 = 2.5$$
$$a_1 = f_1 = 1.0$$
$$a_2 = f_2 = 2.5$$

Burada 4 nokta için 3 aralık olduğuna ve 3 denklem bulmaya çalıştığımıza dikkat edilmelidir. Bu nedenle f_3 değerini kullanarak bir a_3 katsayısı hesaplamadık! Böylece 3 (n-1) = 3 (4-1) = 9 katsayıdan 3'ünü elde etmiş olduk. 2 (n-1) = 2 (4-1) = 6 katsayı daha hesaplamalıyız.

Şimdi (2.5) denklemini kullanarak katsayılar arasındaki ilişkileri bulalım. (2.5) numaralı denklemi kullanmadan önce h_i farklarını hesaplamalıyız.

$$h_0 = x_1 - x_0 = 4.5 - 3.0 = 1.5$$
$$h_1 = x_2 - x_1 = 7.0 - 4.5 = 2.5$$
$$h_2 = x_3 - x_2 = 9.0 - 7.0 = 2.0$$

Ayrıca (8) numaralı eşitlik bize $c_0 = 0$ katsayısını da veriyor. Şimdi tüm bu bilinenleri (5) denkleminde yerine yazalım

$$a_0 + b_0 h_0 + c_0 h_0^{\ 2} = f_1 \Rightarrow 2.5 + 1.5 b_0 + 1.5^2 .0 = 1.0$$
$$a_1 + b_1 h_1 + c_1 h_1^{\ 2} = f_2 \Rightarrow 1.0 + 2.5 b_1 + 2.5^2 .c_1 = 2.5$$
$$a_2 + b_2 h_2 + c_2 h_2^{\ 2} = f_3 \Rightarrow 2.5 + 2.0 b_2 + 2.0^2 .0 = 0.5$$

Bu denklemler toplamda (n-1) = 4 – 1 = 3 denkleme karşılık gelir. Bulmamız gereken 2 (n-1) = n – 1 = 4 – 1 = 3 denklem daha kaldı. Bu kez (2.7) numaralı denklemi kullanarak yine b_i ile c_i katsayıları arasında bağıntılar bulmayı sürdürelim.

$$b_0 + 2 c_0 h_0 = b_1 \Rightarrow b_0 + 2 * 1.5 * 0 = b_1$$
$$b_1 + 2 c_1 h_1 = b_2 \Rightarrow b_1 + 2 * 2.5 * c_1 = b_2$$

Gördüğünüz gibi bu denklemler (n-1) değil n – 2 = 4 – 2 = 2 koşul getiriyor. Böylece 1 koşulumuz daha kaldı. Bu koşul da (2.8) numaralı denklemden gelen ve bize c_0 katsayısını veren koşuldur.

$$c_0 = 0$$

Bu denklemlerin hepsini birlikte çözecek olursak (bir denklem sistemi kurarak ya da yerine koyarak);

$$b_0 = -1.0, b_1 = -1.0, b_2 = 2.2, c_1 = 0.64, c_2 = -1.6$$

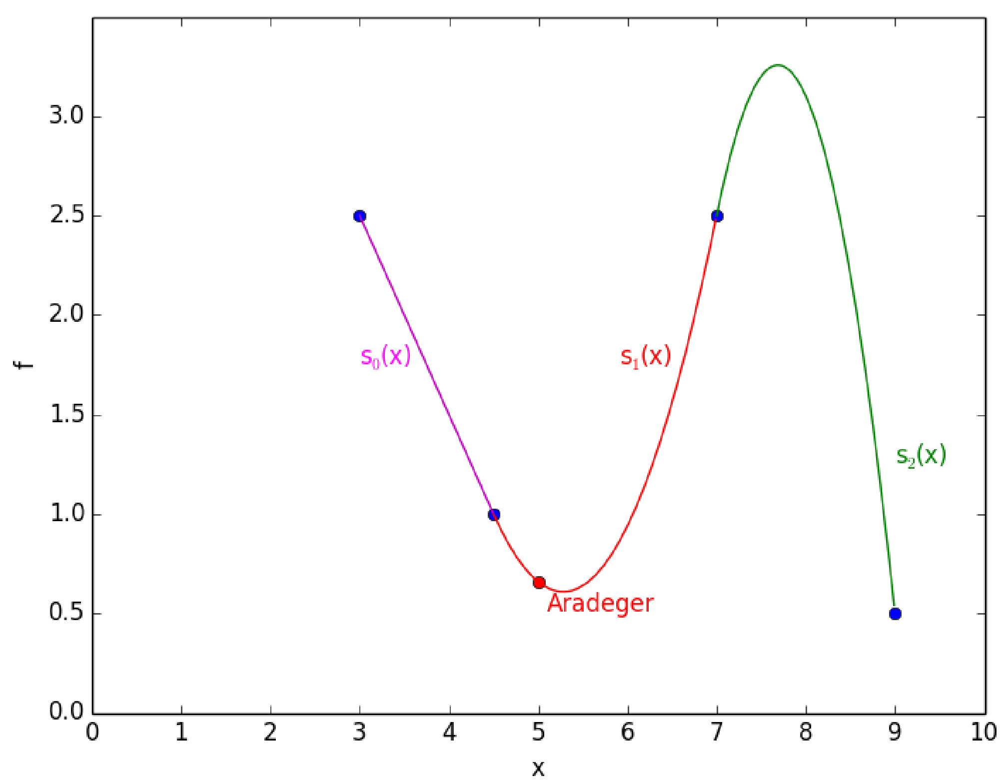
bulunmuş olur. Bulduğumuz bütün katsayıları kullanarak her bir aralık için kuadratik spline fonksiyonlarını elde edelim.

$$s_0(x) = a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 = 2.5 - 1.0(x - 3.0) + 0.0(x - 3.0)^2 = -x + 5.5$$
$$s_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 = 1.0 - 1.0(x - 4.5) + 0.64(x - 4.5)^2 = 0.64x^2 - 6.76x + 18.46$$
$$s_2(x) = a_2 + b_2(x - x_2) + c_2(x - x_2)^2 = 2.5 + 2.2(x - 7.0) - 1.6(x - 7.0)^2 = -1.6x^2 + 24.6x - 91.3$$

$x_1 = 4.5 < x = 5 < x_2 = 7.0$ olduğu için $s_1(x)$ fonksiyonunda x yerine 5 koymamız aradığımız aradeğeri bulmamızı sağlayacaktır.

$$s_1(x) = 0.64x^2 - 6.76x + 18.46 \Rightarrow s_1(5) = 0.64*5^2 - 6.76*5 + 18.46 = 0.66$$

bulunmuş olur. Sonuçlarımızı bir grafik üzerinde görelim (Şekil 2) ve bu grafiği lineer interpolasyon kullanarak elde ettiğimiz Şekil 1'deki grafikle karşılaştıralım. Öncelikle elde ettiğimiz aradeğerin, söz konusu aralığın iki ucundaki değerilerin arasında değil, her iki değerden de küçük olduğunu görüyoruz. Ayrıca, açık ki bu kez düğüm noktalarındaki ani değişimlerden kaçınmış durumdayız ve çok daha düzgün bir şekilde değişimi temsil edebiliyoruz. Ancak yine de düğüm noktaları arasındaki değişimin ikinci dereceden bir polinomla temsil edilmesi yetersizdir.



Şekil 2. Kuadratik Spline İnterpolasyonu.
Mavi noktalar verilen, kırmızı ise interpolasyonla hesaplanan noktayı göstermektedir.

3. Kübik (Üçüncü Dereceden) Spline İnterpolasyonu

Kuadratik spline interpolasyonunun düğümler arasındaki değişimi çok düşük dereceli olduğu için temsil etmekte yetersiz kalabileceğini gördük, İşlemleri çok daha fazla karmaşık hale getirmeden ve çok fazla ön kabul yapmaya gerek kalmadan, daha yüksek dereceli polinomlarla noktalar arası değişimi temsil edebiliriz. Bunun için üçüncü dereceden polinomları kullanmak yaygın bir pratiktir. Ne kadar çok ölçüm noktası olursa, her bir aralığın uzunluğu da o kadar küçük olacak ve üçüncü dereceden polinomlar, bu aralıklardaki değişimi temsil etmekte o kadar başarılı olabilecektir. Kübik interpolasyon, verilen noktalar için her aralığa üçüncü dereceden bir polinom uyumlamaya dayanır. Ancak verilen herhangi iki noktadan sonsuz sayıda üçüncü dereceden polinom geçeceği için uyumlanan polinomları tekil hale getirmek için yine bazı şartlar koymak gerekir. Aralıkları daha yüksek dereceden polinomlarla temsil etmeye çalışmak, bu şartların sayısını arttıracağı ve işlemleri çok daha karmaşık hale getireceği, uyumlanan fonksiyonu da doğal değişimlerden uzaklaştıracağı için tercih edilmez. 3. dereceden (kübik) polinomların yapısı;

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3 \qquad (3.1)$$

şeklinde olmalıdır. Verilen n tane nokta için (n-1) tane aralık olacak, her aralığa bir tane kübik polinom uyarlanacağı için de (n-1) tane $s_i(x)$ fonksiyonu olacak demektir. Bu fonksiyonları belrilemek için, her bir fonksiyon 4 katsayı (a_i, b_i, c_i, d_i) içereceğinden 4 (n-1) adet katasayıyı belirlemek gereklidir. Bu da 4 (n-1) tane denkleme ihtiyaç duyulduğu anlamına gelir. Her bir polinomu tekilleştirmek için konulacak şartlar toplamda 4 (n-1) adet denklem vermelidir ki bu katsayıları bulup, her aralık için ücüncü dereceden bir polinom belirlenmiş olsun.

İlk 3 şart kuadratik spline interpolasyonundakilerle aynıdır.

Şart 1. Fonksiyon her noktadan geçmeli yani verilen herhangi bir “i” noktasından da geçmelidir.

Bu şart “i” noktasının koordinatlarının (x_i, f_i) “i.” aralık için verilen $s_i(x)$ fonksiyonunu sağlaması anlamına gelir. Bu şartı matematiksel olarak ifade edersek;

$$s_i(x_i) = a_i + b_i(x_i - x_i) + c_i(x_i - x_i)^2 + d_i(x_i - x_i)^3 = f_i \qquad (3.2)$$

olmasını gerektirir. ($x_,$ - $x_,$) içeren terimler 0 (sıfır) olacağından bu şart bizi

$$a_i = f_i \quad (3.3)$$

sonucuna götürür. Yani her polinomun birinci katsayısı, o poinomun uyarlandığı aralığın başındaki f değerine eşit alınmalıdır.

Birinci katasayıların tamamını bulmuş olmamız bize (n-1) adet denklem sağlamış olur. Böylece başlangıçtaki 4 (n-1) denklem bulma zorunluluğumuz, 3 (n-1) denklem bulmaya indirgenmiş olur.

Şart 2. Düğüm noktalarında (ilk ve son nokta dışındaki tüm noktalar) komşu iki kübik polinomun değerleri eşit olmalı ($s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1})$) ve bu değerler o nokta için verilen (f_{i+1}) değere eşit olmalıdır. Bu şartı matematiksel olarak ifade edersek;

$$\begin{aligned} s_i(x_{i+1}) &= a_i + b_i(x_{i+1}-x_i) + c_i(x_{i+1}-x_i)^2 + d_i(x_{i+1}-x_i)^2 = \\ s_{i+1}(x_{i+1}) &= a_{i+1} + b_{i+1}(x_{i+1}-x_{i+1}) + c_{i+1}(x_{i+1}-x_{i+1})^2 + c_i(x_{i+1}-x_{i+1})^3 = f_{i+1} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Burada, $x_{i+1} - x_i = h_i$ olsun. $x_{i+1} - x_{i+1} = 0$ olacağından, bu terimleri yerine yerleştirirsek;

$$a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = a_{i+1} = f_{i+1}$$

bulunur. Eşitliğin $a_{i+1} = f_{i+1}$ şeklindeki ikinci kısmı zaten bir önceki şartın bir sonucudur. Burada önemli olan eşitliğin birinci kısmıdır.

$$a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = f_{i+1} \quad (3.5)$$

Bu ifade bize h_i ve f_{i+1} değerlerini bildiğimizden a_i, b_i, c_i, d_i katsayıları arasında bir ilişki sağlar. Bu ilişki (n-1) tane daha denklem demektir. 1. şartın sonunda 3 (n-1)'e indirdiğimiz koşul sayısı böylece 2 (n-1)'e inmiş olur.

Şart 3. Düğüm noktalarındaki birinci türevler eşit olmalıdır ki birbiri ardına gelen interpolasyon fonksiyonları arasında ani değişimler oluşmasın. Bu koşulu koymazsak düğüm noktalarında komşu iki fonksiyonun türevleri eşit olmayacağı için ani değişimlerden kaçınamayız. Bu da lineer spline interpolasyonundaki benzer bir dezavantaja neden olur. Komşu iki kübik spline fonksiyonunun türevlerinin eşitliği şartını matematiksel olarak ifade edersek;

$$\begin{aligned} & s_i'(x_{i+1}) = s_{i+1}'(x_{i+1}) \Rightarrow \\ & b_i + 2c_i(x_{i+1}-x_i) + 3d_i(x_{i+1}-x_i)^2 = b_{i+1} + 2c_{i+1}(x_{i+1}-x_{i+1})^2 + 3d_{i+1}(x_{i+1}-x_{i+1})^2 \end{aligned}$$

elde ederiz. Yine , $x_{i+1} - x_i = h_i$ ve $x_{i+1} - x_{i+1} = 0$ olacağından,

$$b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = b_{i+1} \quad (3.6)$$

bulunmuş olur.

Burada b_i, c_i ve d_i birbirlerine bağlanmaktadır. Ancak, bu üç katsayı (i+1). aralık için "b" katsayısı bilinirse bulunabilir. Bu da (n-1) değil (n-2) denklem bulabildiğimiz anlamına gelir. Böylece 2 (n-1) – (n-2) = n denklem daha bulmamız gerektiği ortaya çıkar. Bu durum bir şart daha koymamızı gerektirir.

Şart 4. Düğüm noktalarında ikinci türevlerin de eşit olması koşulunu koyalım. Bu koşul, düğüm noktaları civarında komşu iki kübik fonksiyonun davranışlarının (artıyorlarsa artış, azalıyorlarsa azalış şekillerinin) da aynı olmasını sağlar.

$$s_i''(x_{i+1}) = s_{i+1}''(x_{i+1}) \Rightarrow 2c_i + 6d_i(x_{i+1} - x_i) = 2c_{i+1} + 6d_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1}) \qquad (3.7)$$

Yine , $x_{i+1} – x_i = h_i$ ve $x_{i+1} – x_{i+1} = 0$ olacağından,

$$2c_i + 6d_i h_i = 2c_{i+1}$$

Bu eşitlik aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} \quad (3.8)$$

Bu denklem c_i ve d_i katsayıları arasında bir ilişki kurulmuş olur. Ancak, bu iki katsayı (i+1). aralık için “c” katsayısı bilinirse bulunabilir. Bu da (n-1) değil (n-2) denklem bulabildiğimiz anlamına gelir. Böylece n – (n – 2) = 2 koşul kaldığı anlamına gelir.

Şart 5. ~~Birinci düğümde (x_1)~~ ikinci türevin 0 (sıfır) ($s''(x_1) = 0$) olduğunu varsayalım.

$$s''(x_1) = 0 \Rightarrow 2c_1 + 6d_1(x_1 - x_1) = 0 \Rightarrow \cancel{c_1 = 0} \quad (3.9)$$

Bu denklem sadece 1 katsayıyı ~~(c_1)~~ belirlediği için 2 – 1 = 1 koşula daha ihtiyaç duyulmaktadır.

Şart 6. ~~(n-1). düğümde~~ (x_{n-1}) ikinci türevin 0 (sıfır) ($s''(x_{n-1}) = 0$) olduğunu varsayalım.

$$s''(x_{n-1}) = 0 \Rightarrow 2c_{n-1} + 6d_{n-1}(x_{n-1} - x_{n-1}) = 0 \Rightarrow c_{n-1} = 0 \quad (3.10)$$

Bu denklem de sadece 1 katsayıyı (c_{n-1}) belirlediği için denklem takımı tamamlanmış olur.

Şimdi Şart 2’yi ifade eden (3.5) denkleminde d_i katsayılarının yerine (3.8)’de elde edilen eşitliği koyalım. a_i katsayıları yerine de (3.3) denkleminden f_i değerlerini koyalım.

$$a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = f_{i+1} \Rightarrow f_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} h_i^3 = f_{i+1}$$

Bu eşitlikte gerekli sadeleştirmeleri yapacak olursak;

$$b_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1}) \quad (3.11)$$

i endeksi yerine i-1 koymak hiçbir şeyi değiştirmeyecektir.

$$b_{i-1} = \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{h_{i-1}}{3}(2c_{i-1} + c_i) \quad (3.12)$$

Bu kez Şart 3'ü ifade eden (3.7) denkleminde d_i katsayılarının yerine (3.8)'de elde edilen eşitliği koyalım.

$$b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = b_{i+1} \Rightarrow b_i + 2c_i h_i + 3\frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} h_i^2 = b_{i+1}$$

Bu eşitlikte gerekli sadeleştirmeleri yapacak olursak;

$$b_{i+1} = b_i + h_i(c_i + c_{i+1})$$

Yine i endeksi yerine i-1 koymak hiçbir şeyi değiştirmeyecektir.

$$b_i = b_{i-1} + h_{i-1}(c_{i-1} + c_i) \quad (3.13)$$

Bu ifadede b_i yerine (3.11), b_{i-1} yerine (3.12) denklemini koyacak olursak;

$$\frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1}) = \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{h_{i-1}}{3}(2c_{i-1} + c_i) + h_{i-1}(c_{i-1} + c_i)$$

Bu ifadenin her iki tarafını 3 ile çarparsak;

$$h_{i-1}c_{i-1} + 2h_{i-1}c_i + 2h_i c_i + h_i c_{i+1} = 3\frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - 3\frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}}$$

Eşitliğin ikinci tarafındaki kesirli ifadelerin Newton'un kesirli farklar tanımına karşılık geldiğini hatırlayalım.

$f[x_i, x_{i+1}] = \dfrac{f_{i+1} - f_i}{h_i}$ ve $f[x_{i-1}, x_i] = \dfrac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}}$ olmak üzere,

$$h_{i-1}c_{i-1} + 2h_{i-1}c_i + 2h_i c_i + h_i c_{i+1} = 3(f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i-1}, x_i]) \quad (3.14)$$

Şimdi tüm bu denklemleri (3.9, 3.10, 3.14) bir denklem sisteminde birleştirecek olursak;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_3 & 2(h_3+h_4) & h_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & .. & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2(h_{n-3}+h_{n-2}) & h_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdot & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \end{bmatrix} *$$

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ \cdots \\ \cdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3(f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]) \\ 3(f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]) \\ 3(f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]) \\ 3(f[x_4,x_5]-f[x_3,x_4]) \\ \cdots \\ 3(f[x_{n-2},x_{n-3}]-f[x_{b-2},x_{n-1}]) \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (3.15)$$

Bu denklem sistemi çözülecek olursa c_i katsayıları elde edilmiş olur. Bu sistemi çözmek için aşağıdaki yolu takip etmek gereklidir. Sistemin katsayılar matrisi olan birinci matrisini H, ikinci matrisi olan bilinmeyenler vektörüne C, eşitliğin karşı tarafındaki sonuç vektörüne R diyelim.

$$H * C = R \Rightarrow H^{-1} * H * C = H^{-1} * R \Rightarrow I * C = H^{-1} * R \Rightarrow C = H^{-1} * R \qquad (3.16)$$

C vektörünün elemanları olan c_i katsayıları bu şekilde belirlendikten sonra, b_i katsayıları (3.12) ve d_i katsayıları (3.8) denklemi ile c_i katsayılarına bağlı olduğundan onlar da söz konusu denklemler kullanılarak elde edilir. a_i katsayıları ise zaten (3.3) denklemi ile her aralığın başlangıcındaki ölçüm değerine (f_i) eşittir.

Örnek 3. Aşağıdaki ölçümleri ve kübik (üçüncü dereceden) spline interpolasyonunu kullanarak x = 5 değeri için aradeğer hesabı yapınız.

i	$\mathbf{x_i}$	$\mathbf{f_i}$
0	3.0	2.5
1	4.5	1.0
2	7.0	2.5
3	9.0	0.5

Çözüm. (3.3) numaralı denklemle ifade edilen birinci şart bize a katsayılarınıı verecektir.

$$a_0 = f_0 = 2.5$$
$$a_1 = f_1 = 1.0$$
$$a_2 = f_2 = 2.5$$

(3.15)'te verilen denklem sistemini kullanarak c_i katsayılarını hesaplayalım. Bunun için öncelikle h_i farklarını hesaplayalım.

$$h_0 = x_1 - x_0 = 4.5 - 3.0 = 1.5$$
$$h_1 = x_2 - x_1 = 7.0 - 4.5 = 2.5$$
$$h_2 = x_3 - x_2 = 9.0 - 7.0 = 2.0$$

Şimdi denklem sisteminin katsayılar matrisini (H) hesaplayalım.

$$\mathrm{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1.5 & 2(1.5+2.5) & 2.5 & 0 \\ 0 & 2.5 & 2(2.5+2.0) & 2.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1.5 & 8.0 & 2.5 & 0 \\ 0 & 2.5 & 9.0 & 2.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eşitliğin karşı tarafındaki vektörü (R) hesaplamak için öncelikle kesirli farkları hesaplamak gereklidir.

$$f[x_0,x_1]=\frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}=\frac{1.0-2.5}{4.5-3.0}=-1.0$$
$$f[x_1,x_2]=\frac{f_2-f_1}{x_2-x_1}=\frac{2.5-1.0}{7.0-4.5}=0.6$$
$$f[x_2,x_3]=\frac{f_3-f_2}{x_3-x_2}=\frac{0.5-2.5}{9.0-7.0}=-1.0$$

Şimdi sonuç matrisi olan R vektörünü hesaplayalım.

$$\mathrm{R}=\begin{bmatrix}0\\3(f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1])\\3(f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2])\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\3(0.6,-(-1.0))\\3(-1.0-0.6)\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\4.8\\-4.8\\0\end{bmatrix}$$

Böylece denklem sistemimiz;

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1.5&8.0&2.5&0\\0&2.5&9.0&2.0\\0&0&0&1\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}c_0\\c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\4.8\\-4.8\\0\end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilmiş olur. Bu denklem sistemini çözmek için katsayılar matrisi (H)'nin tersini almaya ihtiyacımız var.

$$\mathrm{H}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1.5&8.0&2.5&0\\0&2.5&9.0&2.0\\0&0&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1.000&0.000&0.000&0.000\\-0.205&0.137&-0.038&-0.076\\0.057&-0.038&0.122&0.243\\0.000&0.000&0.000&1.000\end{bmatrix}$$

$H*C=R\Rightarrow H^{-1}*H*C=H^{-1}*R\Rightarrow I*C=H^{-1}*R\Rightarrow C=H^{-1}*R$ olduğundan,

$$\mathrm{C}=\begin{bmatrix}c_0\\c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.000&0.000&0.000&0.000\\-0.205&0.137&-0.038&-0.076\\0.057&-0.038&0.122&0.243\\0.000&0.000&0.000&1.000\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}0\\4.8\\-4.8\\0\end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.8395 \\ -0.7665 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Burada 4 noktamız olduğu için 3 aralığımız olduğunu, her bir aralık için bir kübik polinom hesaplayacağımız için de 3 tane c_i katsayısına ihtiyaç duyduğumuzu vurgulayalım. Hesaplanan $c_3 = 0$ katsayısı sadece b_2 ve d_2 katsayılarını hesaplarken kullanacağımız, ancak kübik polinomlarda kullanmayacağımız bir katsayıdır. Şimdi b_i ve d_i katsayılarını sırasıyla (3.12) ve (3.8) denklemlerini kullanarak hesaplayalım.

$$b_{i-1} = \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{h_{i-1}}{3}(2c_{i-1} + c_i) \quad (3.12)$$

$$b_0 = \frac{f_1 - f_0}{h_0} - \frac{h_0}{3}(2c_0 + c_1) = \frac{1.0 - 2.5}{1.5} - \frac{1.5}{3}(2*0 + 0.8395) = -1.4198$$

$$b_1 = \frac{f_2 - f_1}{h_1} - \frac{h_1}{3}(2c_1 + c_2) = \frac{2.5 - 1.0}{2.5} - \frac{2.5}{3}(2*0.8395 - 0.7665) = -0.1604$$

$$b_2 = \frac{f_3 - f_2}{h_2} - \frac{h_2}{3}(2c_2 + c_3) = \frac{0.5_1 - 2.5}{2.0} - \frac{2.0}{3}(2*-0.7665 + 0) = 0.0220$$

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h} \quad (3.8)$$

$$d_0 = \frac{c_1 - c_0}{3h_0} = \frac{0.8395 - 0}{3*1.5} = 0.1866$$

$$d_1 = \frac{c_2 - c_1}{3h_1} = \frac{-0.7665 - 0.8395}{3*2.5} = -0.2141$$

$$d_2 = \frac{c_3 - c_2}{3h_2} = \frac{0 - (-0.7665)}{3*2.0} = 0.1278$$

Böylece bütün a_i, b_i, c_i, d_i katsayılarını hesaplamış olduk. Artık tüm aralıklar için kübik polinomları yazabiliriz.

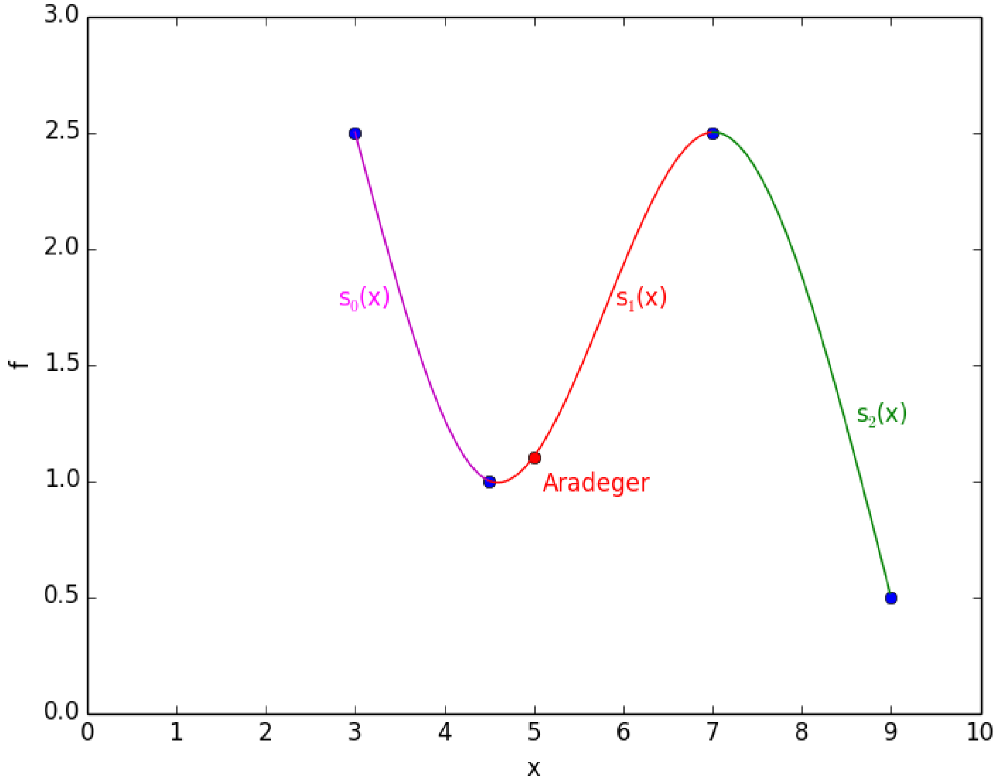
$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3 \quad (3.1)$$

$$s_0(x) = 2.5 - 1.4198(x-3.0) + 0.1866(x-3.0)^3$$
$$s_1(x) = 1.0 - 0.1604(x-4.5) + 0.8395(x-4.5)^2 - 0.2141(x-4.5)^3$$
$$s_2(x) = 2.5 + 0.0220(x-7.0) - 0.7665(x-7.0)^2 + 0.1278(x-7.0)^3$$

$x_1 = 4.5 < x = 5 < x_2 = 7.0$ olduğu için $s_1(x)$ fonksiyonunda x yerine 5 koymamız aradığımız aradeğeri bulmamızı sağlayacaktır.

$$s_1(x) = 1.0 - 0.1604(x-4.5) + 0.8395(x-4.5)^2 - 0.2141(x-4.5)^3 \Rightarrow$$
$$s_1(5) = 1.0 - 0.1604(5-4.5) + 0.8395(5-4.5)^2 - 0.2141(5-4.5)^3 = 1.1029$$

bulunmuş olur. Sonuçlarımızı bir grafik üzerinde görelim (Şekil 3) ve bu grafiği diğer spline interpolasyon yöntemlerini kullanarak elde ettiğimiz Şekil 1 ve Şekil 2'deki grafiklerle karşılaştıralım. Sonuçlarımız diğer her iki interpolasyon yöntemine göre çok daha gerçekçi, düğüm noktaları arasındaki kübik polinomlar ise değişimi temsil etmekte çok daha etkin görünmektedir.



Şekil 3. Kübik Spline İnterpolasyonu.
Mavi noktalar verilen, kırmızı ise interpolasyonla hesaplanan noktayı göstermektedir.