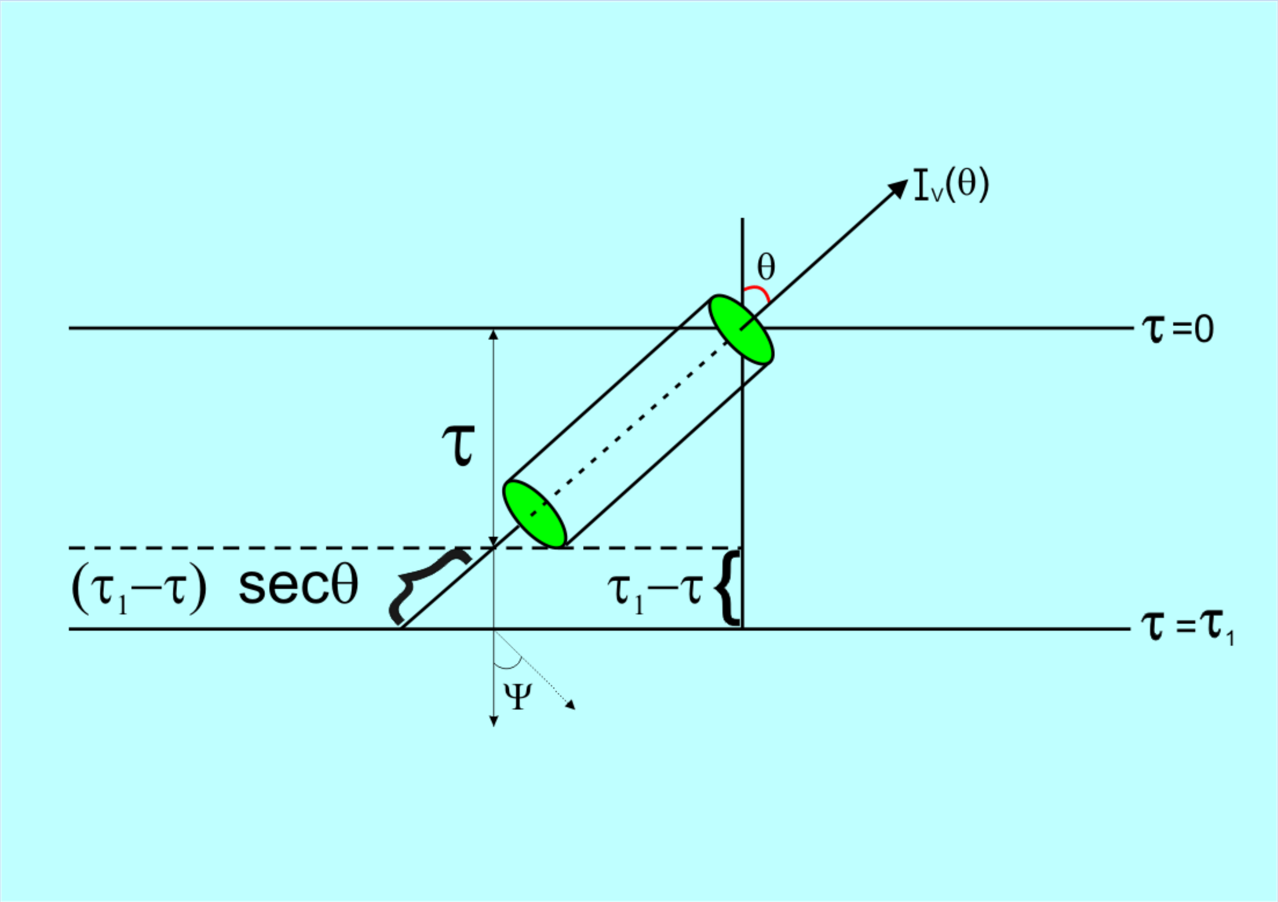
11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

11.2. Geçiş Denkleminin İntegral Şeklinde Çözümü:

Soğurma katsayısını ve onun yıldız atmosferinde enerji akışına etkisini incelemeden önce geçiş denklemini yeniden yazarak $I_\nu(\theta,\tau_\nu)$ yü kaynak fonksiyonunun integrali olarak ifade edelim.

Yıldız içinde bir τ_ν derinliğindeki ışınımı içe ve dışa doğru olmak üzere **ikiye ayıralım** (Şekil **11.5**).



Şekil 11.5. Atmosfer katmanından geçen ışınımın bileşenleri.

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

Dışa doğru olan ışınım $0 \le \boldsymbol{\theta} \le \pi/2$ aralığındaki ışınım demetlerinin toplamıdır. İçe doğru ışınım için $\boldsymbol{\theta}$ açısı $\pi / 2 \le \theta \le \pi$ aralığındadır. Her iki durumda da açı dışa doğru yönelen normalden ölçülür. Fakat içe doğru ışınımı, içe doğru yönelen normalden ölçülen açı cinsinden yazabiliriz. İçe doğru ışınımı $I'(\boldsymbol{\Psi})$ ile gösterelim ve

$$\left.\begin{array}{l} \pi/2 \le \boldsymbol{\theta} \le \pi \\ 0 \le \boldsymbol{\Psi} \le \pi/2 \end{array}\right\} \quad \text{icin} \quad \Psi = \pi - \theta$$

olsun.

$$\text{Cos}\,\theta = \text{Cos}\,(\pi - \Psi) = -\,\text{Cos}\,\Psi$$

olduğu için içe doğru giden ışınım demeti için geçiş denklemini ayrı olarak yazabiliriz.

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- **Dışa Doğru Işınım İçin**:

$$Cos\theta \frac{dI_{\nu}(\theta,\tau_{\nu})}{d\tau_{\nu}} = I_{\nu}(\theta,\tau_{\nu}) - S_{\nu}(\theta,\tau_{\nu}) \qquad , 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

- **İçe Doğru Işınım İçin**:

$$Cos\Psi \frac{dI_{\nu}^{'}(\Psi,\tau_{\nu})}{d\tau_{\nu}} = -I_{\nu}^{'}(\Psi,\tau_{\nu}) + S_{\nu}(\Psi,\tau_{\nu}) \qquad , 0 \leq \Psi \leq \frac{\pi}{2}$$

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- Birinciyi $e^{-\tau_\nu \sec\theta}$, ikinciyi $e^{\tau_\nu \sec\Psi}$ ile çarptıktan sonra bu denklemleri şöyle yazabiliriz:

$$Cos\theta \frac{d}{d\tau_\nu}\left[I_\nu e^{-\tau_\nu \sec\theta}\right] + S_\nu e^{-\tau_\nu \sec\theta} = 0$$

$$Cos\Psi \frac{d}{d\tau_\nu}\left[I_\nu^{'} e^{\tau_\nu \sec\Psi}\right] - S_\nu e^{\tau_\nu \sec\Psi} = 0$$

- Belli bir τ, τ_1 arasında integre edersek,

$$I_\nu(\tau_1,\theta)e^{-\tau_1 \sec\theta} - I_\nu(\tau,\theta)e^{-\tau \sec\theta} = -\int_\tau^{\tau_1} S_\nu(x)e^{-x\sec\theta}\sec\theta dx$$

Burada $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ dir.

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

$$I_\nu'(\tau_1,\Psi)e^{\tau_1 \sec\Psi} - I_\nu(\tau,\Psi)e^{\tau \sec\Psi} = \int_{\tau}^{\tau_1} S_\nu(x)e^{-x\sec\Psi}\sec\Psi dx$$

Burada $0 \leq \Psi \leq \dfrac{\pi}{2}$ dir.

- Şekil **11.5**'ten görüleceği gibi τ_1 gelişigüzel seçilmiştir ve atmosferin üst sınırı altında bir başvuru düzeyi olarak alınabilir. Bazen τ_1'i fotosferin derinliği olarak almak uygun olur. Atmosferin üst sınırı olarak $I'_\nu(0,\Psi)=0$ olan yüzey alınır, yüzeyde $\tau=0$'dır. **O halde son iki denklemden,**

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

$$I_\nu(\tau,\theta) = I_\nu(\tau_1,\theta)e^{-(\tau_1-\tau)\sec\theta} + \int_\tau^{\tau_1} S_\nu(x)e^{-(x-\tau)\sec\theta}\sec\theta dx \qquad ......(13)$$

$$I_\nu^{'}(\tau,\Psi) = \int_0^\tau S_\nu(x)e^{-(\tau-x)\sec\Psi}\sec\Psi dx \qquad ......(14)$$

- (**14**)'ü elde etmek için önce τ=0, τ_1=τ ve $I'_\nu(0,\Psi)=0$ konur. (**13**) denkleminde sağdaki ilk terim τ_1 derinliğindeki katmanın τ derinliğinde ve **dışa doğru θ** doğrultusundaki ışınıma katkısıdır. Ancak τ_1'den τ'ya uzanan (τ_1-τ)sec **θ** yolu boyunca soğurma çarpanı $e^{-(\tau_1-\tau)\sec\theta}$ kadar azalmıştır. Bu τ_1 ile τ arasındaki katmanı geçen ışınımıdır. İkinci terim ise τ ile τ_1 arasındaki tüm katmanlardan (yol boyunca soğurma ile azaldıktan sonra) τ'ya ulaşan tüm katkılardır.
- (**14**)'ün sağ tarafındaki integral atmosferin üst tabakası ile τ derinliğindeki tabaka arasındaki tüm katmanların τ derinliğinde ve içe doğru olan ışınıma katkıları toplamıdır.

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- YTD durumunda (**13**) ve (**14**)'te S_ν yerine B_ν gelir. Bu durumda katmanların toplam ışınıma katkısı karacismin katkısı gibi olur.
- Çoğu durumda τ_1'i atmosferin üst sınırından çok içeride seçebiliriz. Yani $\tau_1 = \infty$ alabiliriz. Bu durumda denklemler daha basit şekle girer:

$$I_\nu(\tau,\theta) = \int_\tau^\infty S_\nu(x) e^{-(x-\tau)\sec\theta} \sec\theta dx \qquad ......(15)$$

$$I_\nu^{'}(\tau,\Psi) \qquad \text{degismez.}$$

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- Yıldız yüzeyinde τ = 0 koyarsak, yüzeyden **θ** doğrultusunda çıkan ışınım;

$$I_\nu(0,\theta) = \int_0^\infty S_\nu(x) e^{-x\sec\theta} \sec\theta dx \qquad ......(16)$$

- Bu son denklem Güneş Fiziği için önemlidir. Çünkü onu kullanarak ve kenar kararmasını inceleyerek kaynak fonksiyonunun derinliğe bağlılığı araştırılabilir.
- **ÖDEV:** Geçiş denklemini (dy/dx)+Py=Q şeklinde lineer diferansiyel denklem olarak yazıp genel çözümünü bulunuz. İntegral sabitini $\tau=\tau_1$ için belirleyerek (13) çözümünü doğrulayınız.

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

11.3 Geçiş Denkleminin Yaklaşık Çözümleri:

- Geçiş denklemini toplam ışınım için elde edelim. Bunun için geçiş denkleminin ilk şeklini integre etmek gerekir.

$$dI_\nu = j_\nu \rho dx \sec\theta - \kappa_\nu \rho I_\nu dx \sec\theta$$

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- ν üzerinden integre etmek için iki tarafı $d\nu$ ile çarpalım.

$$d\int_0^\infty I_\nu d\nu = \rho dx \sec\theta \int_0^\infty j_\nu d\nu - \rho dx \sec\theta \int_0^\infty \kappa_\nu I_\nu d\nu$$

$$I = \int_0^\infty I_\nu d\nu \qquad \text{ve} \qquad j = \int_0^\infty j_\nu d\nu$$

- diyelim ve basit hale getirmek için κ_ν'nün ν'den bağımsız olduğunu, yani κ_ν=κ=**sabit** olduğunu (bu durumda atmosfere gri atmosfer denir) varsayalım.

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- Bu durumda toplam ışınım için geçiş denklemi şöyle olur:

  $dI = j\rho d\mathbf{x} \sec\theta - \kappa\rho I d\mathbf{x} \sec\theta$, $\quad d\tau = -\kappa\rho d\mathbf{x}$
- tanımı ile,

$$\cos\theta \frac{dI(\theta,\tau)}{d\tau} = I(\theta,\tau) - \frac{j}{\kappa} \qquad \text{......(17)}$$

- Bu denklem de yaklaştırma yapmadan basitçe çözülemez. Çünkü kaynak fonksiyonu j/κ bilinmiyor. İşlemleri kolaylaştırmak için, frekans üzerinden integre edilmiş kabul edilen şu ortalama değer tanımları kullanılır (**daha önce** (**2**), (**7**) ve (**9**)'da **tanımlanan**):

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

$$\left.\begin{aligned} J(\tau) &= \frac{1}{4\pi}\int I(\theta,\tau)\,d\omega \qquad \text{ısınımın ortalama siddeti} \\ \mathrm{H}(\tau) &= \frac{1}{4\pi}\int I(\theta,\tau)\cos\theta\,d\omega \quad \text{disa dogru net akı} \\ \mathrm{K}(\tau) &= \frac{1}{4\pi}\int I(\theta,\tau)\cos^2\theta\,d\omega \end{aligned}\right\} \quad ......(18)$$

- Bu denklemlerde integral tüm küre üzerinden alınır. dω = sin **θ** d**θ** dφ, ya da ışınım alanı **θ** = 0 etrafında simetrik olduğuna göre

d$\boldsymbol{\omega}$ = 2π sin **θ** d**θ** alıp (**17**)'yi **θ** üzerinden **integre edersek**,

$$\int_{\omega} \cos\theta \frac{dI(\theta,\tau)}{d\tau} d\omega = \int_{\omega} I(\theta,\tau)\,d\omega - \int_{\omega} \frac{j}{\kappa} d\omega$$

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- τ'ya göre **türev** ω **üzerinden integrasyondan bağımsız olduğundan;**

$$\frac{d}{d\tau}\int_{\omega} I(\theta,\tau)\cos\theta d\omega = \int_{\omega} I(\theta,\tau)d\omega - \int_{\omega}\frac{j}{\kappa}d\omega$$

- j ve κ'nın **açısal bağlılığı olmadığından,**

$$4\pi\frac{dH(\tau)}{d\tau} = 4\pi \mathrm{J}(\tau) - 4\pi\frac{j}{\kappa}$$

$$\frac{dH(\tau)}{d\tau} = \mathrm{J}(\tau) - \frac{j}{\kappa} \qquad \text{......(19)}$$

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- Şimdi de cos θ ile çarpıp integre edersek:

$$\frac{d}{d\tau}\int I(\theta,\tau)\cos^2\theta d\omega = \int I(\theta,\tau)\cos\theta d\omega - \underbrace{\frac{j}{\kappa}\int \cos\theta d\omega}_{0}$$

$$\frac{d}{d\tau}(4\pi K) = 4\pi H$$

$$\frac{dK}{d\tau} = H \qquad \text{......}(20)$$

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- Ele aldığımız atmosferde enerji kaynağı (nükleer enerji üretimi gibi) ya da enerji "**yutan**" bölgeler **olmadığına göre** H(τ) akısı τ'nun fonksiyonu değildir. Yani sabit olmalıdır. Buna ışınım dengesi denir. O halde (**19**)'da dH / dτ = 0 konur ve (**20**) **integre edilirse**,

$$J = \frac{j}{\kappa} \qquad \ldots\ldots(21)$$

$$K = H\tau + sabit \qquad \ldots\ldots(22) \qquad \text{elde edilir.}$$