11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

11.3 Geçiş Denkleminin Yaklaşık Çözümleri:

- Geçiş denklemini toplam ışınım için elde edelim. Bunun için geçiş denkleminin ilk şeklini integre etmek gerekir.

$$dI_\nu = j_\nu \rho dx\sec\theta - \kappa_\nu \rho I_\nu dx\sec\theta$$

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- ν üzerinden integre etmek için iki tarafı $d\nu$ ile çarpalım.

$$d\int_0^\infty I_\nu d\nu = \rho dx \sec\theta \int_0^\infty j_\nu d\nu - \rho dx \sec\theta \int_0^\infty \kappa_\nu I_\nu d\nu$$

$$I = \int_0^\infty I_\nu d\nu \qquad \text{ve} \qquad j = \int_0^\infty j_\nu d\nu$$

- diyelim ve basit hale getirmek için κ_ν'nün ν'den bağımsız olduğunu, yani κ_ν=κ=**sabit** olduğunu (bu durumda atmosfere gri atmosfer denir) varsayalım.

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- Bu durumda toplam ışınım için geçiş denklemi şöyle olur:

  $dI = j\rho d\mathbf{x} \sec\theta - \kappa\rho I d\mathbf{x} \sec\theta, \quad d\tau = -\kappa\rho d\mathbf{x}$

- tanımı ile,

$$\cos\theta \frac{dI(\theta,\tau)}{d\tau} = I(\theta,\tau) - \frac{j}{\kappa} \qquad \text{......(17)}$$

- Bu denklem de yaklaştırma yapmadan basitçe çözülemez. Çünkü kaynak fonksiyonu j/κ bilinmiyor. İşlemleri kolaylaştırmak için, frekans üzerinden integre edilmiş kabul edilen şu ortalama değer tanımları kullanılır (**daha önce** (**2**), (**7**) ve (**9**)'da **tanımlanan**):

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

$$\left.\begin{aligned} J(\tau) &= \frac{1}{4\pi}\int I(\theta,\tau)\,d\omega \quad \text{ısınımın ortalama siddeti} \\ \mathrm{H}(\tau) &= \frac{1}{4\pi}\int I(\theta,\tau)\cos\theta\,d\omega \quad \text{disa dogru net akı} \\ \mathrm{K}(\tau) &= \frac{1}{4\pi}\int I(\theta,\tau)\cos^2\theta\,d\omega \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(18)$$

- Bu denklemlerde integral tüm küre üzerinden alınır. dω = sin **θ** d**θ** dφ, ya da ışınım alanı **θ** = 0 etrafında simetrik olduğuna göre

dω = 2π sin **θ** d**θ** alıp (**17**)'yi **θ** üzerinden **integre edersek**,

$$\int_{\omega}\cos\theta\,\frac{dI(\theta,\tau)}{d\tau}\,d\omega = \int_{\omega} I(\theta,\tau)\,d\omega - \int_{\omega}\frac{j}{\kappa}\,d\omega$$

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- τ’ya göre **türev** ω **üzerinden integrasyondan bağımsız olduğundan;**

$$\frac{d}{d\tau}\int_{\omega} I(\theta,\tau)\cos\theta d\omega = \int_{\omega} I(\theta,\tau)d\omega - \int_{\omega}\frac{j}{\kappa}d\omega$$

- j ve κ’nın **açısal bağlılığı olmadığından**,

$$4\pi\frac{dH(\tau)}{d\tau} = 4\pi \mathrm{J}(\tau) - 4\pi\frac{j}{\kappa}$$

$$\frac{dH(\tau)}{d\tau} = \mathrm{J}(\tau) - \frac{j}{\kappa} \qquad \text{......(19)}$$

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- Şimdi de cos θ ile çarpıp integre edersek:

$$\frac{d}{d\tau}\int I(\theta,\tau)\cos^2\theta d\omega = \int I(\theta,\tau)\cos\theta d\omega - \underbrace{\frac{j}{\kappa}\int \cos\theta d\omega}_{0}$$

$$\frac{d}{d\tau}(4\pi K) = 4\pi H$$

$$\frac{dK}{d\tau} = H \qquad \text{......(20)}$$

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- Ele aldığımız atmosferde enerji kaynağı (nükleer enerji üretimi gibi) ya da enerji "**yutan**" bölgeler **olmadığına göre** H(τ) akısı τ'nun fonksiyonu değildir. Yani sabit olmalıdır. Buna ışınım dengesi denir. O halde (**19**)'da dH / dτ = 0 konur ve (**20**) **integre edilirse**,

$$J = \frac{j}{\kappa} \qquad \text{......(21)}$$

$$K = H\tau + sabit \qquad \text{......(22)} \qquad \text{elde edilir.}$$

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

11.3.1. Eddington'un İlk Yaklaştırması:

- Yukarıda belirtildiği gibi (**17**) tam çözülemez, dolayısıyla $I(\theta)$ **belli değildir**. Eddington'un ilk yaklaştırmasında ışınım alanı dışa doğru sabit $I_1(\tau)$ ve içe doğru da sabit $I_2(\tau)$ **alınır,** yani

$$I(\tau,\theta)=\begin{cases} I_1(\tau) & 0\le\theta\le\pi/2 \\ I_2(\tau) & \pi/2\le\theta\le\pi \end{cases} \qquad \text{......(23)}$$

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- I_1 ve I_2'yi τ'nun fonksiyonu olarak bulmalıyız. Bu yaklaştırma $\theta = \pi / 2$ 'de süreksizdir ama **bizi integral denkleminden kurtarır** ve yeterli ilk yaklaştırma sağlar.

(**18**) integrallerini alalım:

$$J = \frac{1}{4\pi}\int I d\omega = \frac{2\pi}{4\pi}\left[\int_0^{\pi/2} I_1 \sin\theta d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} I_2 \sin\theta d\theta\right]$$

$$= \frac{1}{2} I_1 (-\cos\theta)_0^{\pi/2} + \frac{1}{2} I_2 (-\cos\theta)_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2}(I_1 + I_2) \qquad \text{......(24)}$$

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- **Bu sonuç uygundur, çünkü J, I_1 ve I_2 'nin ortalamasıdır.**

$$H = \frac{1}{4\pi}\int I\cos\theta d\omega = \frac{2\pi}{4\pi}\left(\int_0^{\pi/2} I_1\cos\theta\sin\theta d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} I_2\cos\theta\sin\theta d\theta\right)$$

$$= \frac{1}{2}I_1\left(\frac{1}{2}\sin^2\theta\right)\Bigg|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}I_2\left(\frac{1}{2}\sin^2\theta\right)\Bigg|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{1}{4}(I_1 - I_2) \qquad ......(25)$$

- H = (1/4π) F idi, o halde 4πH net akıdır. Yani yıldızın birim yüzeyinden birim zamanda çıkan enerjidir.

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- **Üçüncü integrali de alırsak,**

$$K=\frac{1}{4\pi}\int_{\omega} I\cos^2\theta d\omega=\frac{2\pi}{4\pi}\left[\int_0^{\pi/2} I_1\cos^2\theta\sin\theta d\theta+\int_{\pi/2}^{\pi} I_2\cos^2\theta\sin\theta d\theta\right]$$

$$K=\frac{1}{2}I_1\left(-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right)\Bigg|_0^{\pi/2}+\frac{1}{2}I_2\left(-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right)\Bigg|_{\pi/2}^{\pi}=\frac{1}{6}(I_1+I_2)$$

(24)'ten,

$$K=\frac{1}{3}J \qquad ......(26) \qquad \text{bulunur.}$$

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- Şimdi $J(\tau)$'yu ve $I_1(\tau)$, $I_2(\tau)$'yu bulalım.
  (**22**) ve (**26**)'dan;

  $J = 3H\tau + \text{sabit}$ ......(27)

- Sabiti bulmak için önce $\tau = 0$ koyalım.

  $J(0) = \textbf{sabit}$ ......(28)

- Yüzeyden içe doğru ışınım olmadığına göre,

  $I_2(0) = 0$

  olmalıdır.

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- (24) ve (25)'ten sırasıyla

$$\left.\begin{aligned} J(0) &= \frac{1}{2} I_1(0) \\ H &= \frac{1}{4} I_1(0) \end{aligned}\right\} \quad J(0) = 2H$$

- Bu (28)'de kullanılırsa,

  sabit = 2H

- bulunur. Bunu (**27**)'de yerine koyarsak :

  $J(\tau) = 3H\tau + 2H = H(2+3\tau)$ ......(29)

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- (**24**) ve (**25**)'ten I_1 ve I_2 'yi çözersek,

  $I_1(\tau)$= J(τ) + 2H

  $I_1(\tau)$= H(4 + 3τ) ......(30)

  $I_2(\tau)$= J - 2H= 3Hτ ......(31)

- **Sıcaklık Dağılımı**
- Bir yıldızda kuramsal enerji dağılımını hesaplarken karşılaşılan en önemli veri sıcaklığın derinlikle değişmesidir. Geçiş denkleminin farklı çözümleri birbirinden farklı çözümler (sonuçlar) vermektedir. Çünkü verdikleri sıcaklık eğimi (değişimi) farklı olmaktadır.

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- Işınım alanı eş yönlü ve T sıcaklığında çevredeki madde ile dengede ise Kirchoff yasası geçerlidir. Yani,

  $j_\nu = \kappa_\nu \mathbf{B}_\nu(T)$

- dir. Eğer madde **YTD** ise bu yine geçerlidir. Bu durumda, κ_ν frekanstan bağımsız ise toplam ışınım için

$$j = \kappa \int_0^\infty B_\nu(T) d\nu = \kappa \frac{\sigma}{\pi} T^4$$

- Burada σ **Stefan-Boltzman sabitidir**. (**21**)'den gri atmosfer için J = j / κ olduğundan,
- $J = (\sigma/\pi)T^4$ ......(32)
- olur. Burada T'ye ışınımın etkin sıcaklığı denir.

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- Demek ki κ, ν'den **bağımsız** ise YTD'deki maddenin sıcaklığı ışınımın etkin sıcaklığına eşittir.

  (**32**)'yi (**29**)'da kullanırsak,

  $J = H(2 + 3\tau)$ ......(29)

  $(\sigma/\pi)T^4 = H(2 + 3\tau)$

- Yüzeydeki sıcaklık T_0 olmak üzere τ =0 koyarsak,

$$T_0^4 = 2H\frac{\pi}{\sigma}$$

Buradan,

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

$$T^4 = T_0^4 \left(1 + \frac{3}{2}\tau\right) \qquad \ldots\ldots(33)$$

- elde edilir. Bu ifade sıcaklığın optik derinlikle değişimini verir. Stefan-Boltzman yasasından,

$$F = \sigma T_e^4 \qquad \text{ve} \qquad H = \frac{1}{4\pi} F$$

- olduğuna göre $\quad T_0^4 = \frac{1}{2} T_e^4 \quad \text{veya} \quad T_e = \sqrt[4]{2} \cdot T_0 = 1{,}189 T_0$

bulunur (**Güneş**'in etkin sıcaklığından T_0 yüzey sıcaklığını buluruz. $T_{e\odot}$= 5780 °K).

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

T_e cinsinden yazarsak,

$$T^4 = \frac{1}{2} T_e^4 (1 + \frac{3}{2} \tau) \qquad ......(34)$$

Demek ki $\tau = 2 / 3$ optik derinliğinde fotosferin sıcaklığı etkin sıcaklığa eşittir. Tam çözüm bundan çok az fark eder.

11.3.4. Eddington'un İkinci Yaklaştırması ve Kenar Kararması :

Güneş diski kenarda ortasına göre daha karanlıktır. Bu diğer yıldızlar için de doğrudur. Çift yıldız ışık eğrileri bunu göstermektedir. Işınım şiddetinin disk üzerindeki konuma göre değişmesi, ışınımın normalle yaptığı **θ** açısına bağlılıktan ileri gelmektedir. Dolayısıyla I'yı **θ**'ya bağlı olarak bulmalıyız.

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- Dışa doğru ışınım şöyle veriliyordu:

$$I_\nu(\tau,\theta) = \int_\tau^\infty S_\nu(x) e^{-(x-\tau)\sec\theta} \sec\theta dx$$

Frekans uzerinden toplarsak,

$$I(\tau,\theta) = \int_\tau^\infty S(x) e^{-(x-\tau)\sec\theta} \sec\theta dx$$

yazabiliriz. Gri atmosfer (κ = sabit) durumunda J = j/κ bulunmuştu. Yani kaynak fonksiyonu ortalama şiddet J'ye eşittir. Bu durumda geçiş denklemini toplam ışınım için yazar ve S(τ)= J(τ)= H(2 + 3τ) koyup integre edersek,

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

$$I(\tau,\theta)=\int_{\tau}^{\infty} J(x)e^{-(x-\tau)\sec\theta}\sec\theta dx$$

$$=\int_{\tau}^{\infty} H(2+3x)e^{-(x-\tau)\sec\theta}\sec\theta dx$$

$$I(\tau,\theta)=2H\int_{\tau}^{\infty} e^{-(x-\tau)\sec\theta}\sec\theta dx+3H\int_{\tau}^{\infty} xe^{-(x-\tau)\sec\theta}\sec\theta dx+3H$$

Burada $y=(x-\tau)\sec\theta,\qquad dy=dx\sec\theta$ dersek,

$$=2H\int_{0}^{\infty} e^{-y}dy+3H\int_{0}^{\infty}(\tau+y\cos\theta)e^{-y}dy$$

$$=2H(-e^{-y})\Big|_{0}^{\infty}+3H\tau(-e^{-y})\Big|_{0}^{\infty}+3H\cos\theta\int_{0}^{\infty} ye^{-y}dy$$

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

$$= 2H + 3H\tau + 3H\cos\theta\left[\left(-ye^{-y}\right)_0^\infty + \int_0^\infty e^{-y}dy\right]$$

$$= 2H + 3H\tau + 3H\cos\theta(0+1)$$

$$I(\tau,\theta) = H(2 + 3\tau + 3\cos\theta) \qquad ......(35a)$$

Aynı işlemi içe doğru ışınım için yaparsak,

$$I'(\tau,\Psi) = \int_0^\tau J(x)e^{-(\tau-x)\sec\Psi}\sec\Psi dx$$

$$= \int_0^\tau H(2+3x)e^{-(\tau-x)\sec\Psi}\sec\Psi dx$$

$$= H\left[(2-3\cos\Psi)(1-e^{-\tau\sec\Psi}) + 3\tau\right] \qquad ......(35b)$$

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

(**35a**)'yı yüzeyden çıkan ışınım için yazarsak (τ=0)

$$I(0,\theta) = H(2+3\cos\theta) \qquad ......(35c)$$

Bu ifadeden,

$$I(0,0) = 5H\ , \qquad I(0,\pi/2) = 2H$$

bulunur. Bunları (**30**)'dan elde edilen I_1 (0)=4H ile karşılaştırırsak cosθ=2/3 iken Eddington'un ilk yaklaştırması ile (**35c**) aynı sonucu verdiğini görürüz.

Beklenildiği gibi, **θ** arttıkça şiddet azalmaktadır. Bu kenar kararmasının etkisi, $I(0,\theta)$ / $I(0,0)$ oranı hesaplanarak görülebilir :

$$\frac{I(0,\theta)}{I(0,0)} = \frac{2}{5}\left(1+\frac{3}{2}\cos\theta\right) \qquad ......(36)$$

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- Bu denklemin verdiği değerler ile gözlenen değerler Güneş için aşağıdaki çizelgede verilmektedir.

cosθ	Gözlenen	Eddington Yaklaştırması	Tam Çözüm (Chandrasekhar)
1,00	1,00	1,00	1,00
0,90	0,944	0,940	0,939
0,80	0,898	0,880	0,878
0,70	0,842	0,820	0,816
0,60	0,788	0,760	0,755
0,50	0,730	0,700	0,692
0,40	0,670	0,640	0,629
0,30	0,602	0,580	0,565
0,20	0,522	0,520	0,499
0,10	0,450	0,460	0,429
0,00	-	0,400	0,344

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

Görüldüğü gibi basit kuramın öngördüğü kenar kararması gereğinden büyük, ancak genellikle gözlemlerle uyuşmaktadır ve bu da Güneş atmosferinde ışımasal dengenin (ışınım dengesinin) varlığını göstermektedir.

Burada şu noktalar unutulmamalıdır: Toplam ışınımdaki kenar kararması, $I_\nu(0,\theta)/ I_\nu(0,0)$ tek renk değerlerden ve gözlenen enerji dağılımından bulunmak zorundadır. İkincisi Güneş maddesi gri değildir, bu nedenle gri cisim enerji dağılımı Güneş için geçerli olmayabilir.

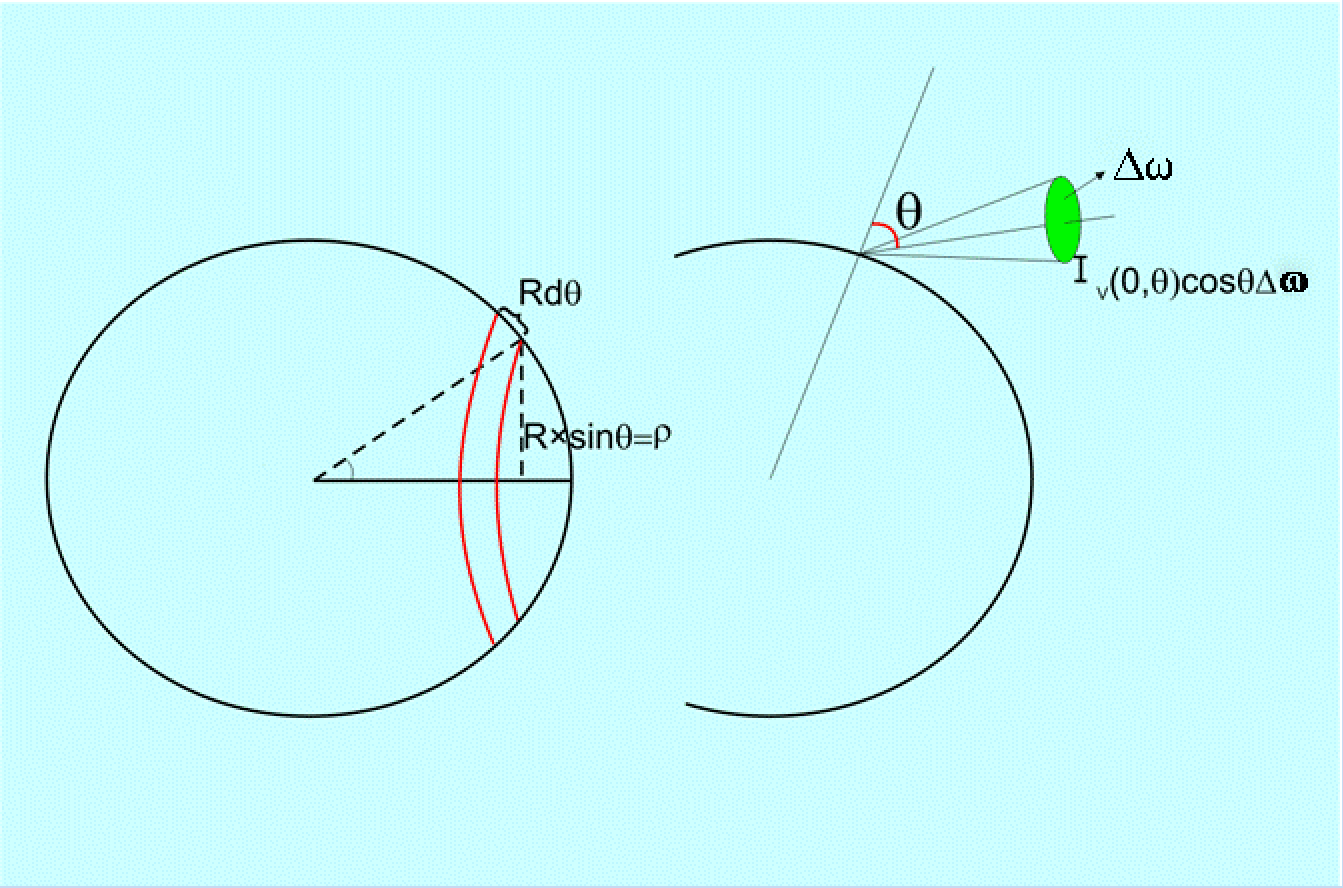
Tek renklerle karşılaştırma yapılırsa uyumun böyle iyi olmadığı görülür.

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

$I_\nu(\tau,\theta)/ I_\nu(\tau,0)$ nun verilen bir optik derinlikte θ nın fonksiyonu olarak grafiği çizilirse salınan ışınımın eşyönlülükten ne kadar saptığını görebiliriz. τ ne kadar büyükse, yani yıldız içinde ne kadar derinde isek, ışınım o kadar eşyönlüdür, çünkü τ arttıkça $\cos\theta$ teriminin katkısı gittikçe azalır. Fiziksel olarak bu demektir ki, **iç kısımlarda ışınım** karacisim ışınımına daha yakındır, yani YTD iç kısımlarda daha büyük oranda sağlanmaktadır.

12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI

- Akı dışarıya doğru net enerji akışını tanımlar. Yıldız tayfı gözlemlerinin ν'ye göre $I_\nu(0,\theta)$ veya $F_\nu(0)$ dağılımını verip veremeyeceğini inceleyelim.
- **Güneş** dışındaki **yıldızların farklı bölgelerini ayrı ayrı göremediğimizden yıldızın görünen yüzeyinin tümünden gelen ışınımın toplamını gözleyebiliriz(**Şekil **12.1).**



Şekil 12.1. Güneş ve yıldız yüzeyinden gelen toplam ışınımın özelliği.