

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

11.3.1. Eddington'un İlk Yaklaşması:

- Yukarıda belirtildiği gibi (17) tam çözülemez, dolayısıyla $I(\theta)$ belli değildir. Eddington'un ilk yaklaşımında ışınım alanı dışa doğru sabit $I_1(\tau)$ ve içe doğru da sabit $I_2(\tau)$ alınır, yani

$$I(\tau, \theta) = \begin{cases} I_1(\tau) & 0 \leq \theta \leq \pi / 2 \\ I_2(\tau) & \pi / 2 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \quad \text{.....(23)}$$

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- I_1 ve I_2 'yi τ 'nın fonksiyonu olarak bulmalıyız. Bu yaklaşım $\theta = \pi / 2$ 'de süreksizdir ama bizi integral denkleminde kurtarır ve yeterli ilk yaklaşım sağlar.

(18) integrallerini alalım:

$$J = \frac{1}{4\pi} \int I d\omega = \frac{2\pi}{4\pi} \left[\int_0^{\pi/2} I_1 \sin \theta d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} I_2 \sin \theta d\theta \right]$$

$$= \frac{1}{2} I_1 (-\cos \theta)_0^{\pi/2} + \frac{1}{2} I_2 (-\cos \theta)_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2} (I_1 + I_2) \quad \dots\dots(24)$$

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- Bu sonuç uygundur, çünkü J , I_1 ve I_2 'nin ortalamasıdır.

$$H = \frac{1}{4\pi} \int I \cos\theta d\omega = \frac{2\pi}{4\pi} \left(\int_0^{\pi/2} I_1 \cos\theta \sin\theta d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} I_2 \cos\theta \sin\theta d\theta \right)$$
$$= \frac{1}{2} I_1 \left(\frac{1}{2} \sin^2 \theta \right) \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2} I_2 \left(\frac{1}{2} \sin^2 \theta \right) \Big|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{1}{4} (I_1 - I_2) \quad \dots\dots(25)$$

- $H = (1/4\pi) F$ idi, o halde $4\pi H$ net akıdır. Yani yıldızın birim yüzeyinden birim zamanda çıkan enerjidir.

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- Üçüncü integrali de alırsak,

$$K = \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} I \cos^2 \theta d\omega = \frac{2\pi}{4\pi} \left[\int_0^{\pi/2} I_1 \cos^2 \theta \sin \theta d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} I_2 \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \right]$$

$$K = \frac{1}{2} I_1 \left(-\frac{1}{3} \cos^3 \theta \right) \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2} I_2 \left(-\frac{1}{3} \cos^3 \theta \right) \Big|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{1}{6} (I_1 + I_2)$$

(24)'ten,

$$K = \frac{1}{3} J \quad \text{.....(26)} \quad \text{bulunur.}$$

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- Şimdi $J(\tau)$ 'yu ve $I_1(\tau)$, $I_2(\tau)$ 'yu bulalım.
(22) ve (26)'dan;

$$J = 3H\tau + \text{sabit} \quad \dots\dots(27)$$

- Sabiti bulmak için önce $\tau = 0$ koyalım.

$$J(0) = \text{sabit} \quad \dots\dots(28)$$

- Yüzeyden içe doğru ışınım olmadığına göre,

$$I_2(0) = 0$$

olmalıdır.

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- (24) ve (25)'ten sırasıyla

$$\left. \begin{aligned} J(0) &= \frac{1}{2} I_1(0) \\ H &= \frac{1}{4} I_1(0) \end{aligned} \right\} J(0) = 2H$$

- Bu (28)'de kullanılırsa,
sabit = 2H
- bulunur. Bunu (27)'de yerine koyarsak :

$$J(\tau) = 3H\tau + 2H = H(2+3\tau) \quad \text{.....(29)}$$

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- (24) ve (25)'ten I_1 ve I_2 'yi çözersek,

$$I_1(\tau) = J(\tau) + 2H$$

$$I_1(\tau) = H(4 + 3\tau) \quad \dots\dots(30)$$

$$I_2(\tau) = J - 2H = 3H\tau \quad \dots\dots(31)$$

- **Sıcaklık Dağılımı**

- Bir yıldızda kuramsal enerji dağılımını hesaplariken karşılaşılan en önemli veri sıcaklığın derinlikle değişmesidir. Geçiş denkleminin farklı çözümleri birbirinden farklı çözümler (sonuçlar) vermektedir. Çünkü verdikleri sıcaklık eğimi (değişimi) farklı olmaktadır.

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- Işınım alanı eş yönlü ve T sıcaklığında çevredeki madde ile dengede ise Kirchoff yasası geçerlidir. Yani,

$$j_{\nu} = \kappa_{\nu} B_{\nu}(T)$$

- dir. Eğer madde **YTD** ise bu yine geçerlidir. Bu durumda, κ_{ν} frekanstan bağımsız ise toplam ışınım için

$$j = \kappa \int_0^{\infty} B_{\nu}(T) d\nu = \kappa \frac{\sigma}{\pi} T^4$$

- Burada σ Stefan-Boltzman sabitidir. (21)'den gri atmosfer için $J = j / \kappa$ olduğundan,
- $J = (\sigma/\pi) T^4$ (32)
- olur. Burada T 'ye ışınımın etkin sıcaklığı denir.

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- Demek ki κ , v 'den **bağımsız** ise YTD'deki **maddenin sıcaklığı ışınımın etkin sıcaklığına eşittir.**

(32)'yi (29)'da kullanırsak,

$$J = H(2 + 3\tau) \quad \dots\dots(29)$$

$$(\sigma/\pi)T^4 = H(2 + 3\tau)$$

- **Yüzeydeki sıcaklık T_0** olmak üzere $\tau = 0$ koyarsak,

$$T_0^4 = 2H \frac{\pi}{\sigma}$$

Buradan,

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

$$T^4 = T_0^4 \left(1 + \frac{3}{2} \tau\right) \quad \dots\dots(33)$$

- elde edilir. Bu ifade sıcaklığın optik derinlikle değişimini verir. Stefan-Boltzman yasasından,

$$F = \sigma T_e^4 \quad \text{ve} \quad H = \frac{1}{4\pi} F$$

- olduğuna göre $T_0^4 = \frac{1}{2} T_e^4$ veya $T_e = \sqrt[4]{2} \cdot T_0 = 1,189T_0$

bulunur (**Güneş**'in etkin sıcaklığından T_0 yüzey sıcaklığını buluruz. $T_{e\odot} = 5780$ °K).

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

T_e cinsinden yazarsak,

$$T^4 = \frac{1}{2} T_e^4 \left(1 + \frac{3}{2} \tau\right) \dots\dots(34)$$

Demek ki $\tau = 2 / 3$ optik derinliğinde fotosferin sıcaklığı etkin sıcaklığa eşittir. Tam çözüm bundan çok az fark eder.

11.3.4. Eddington'un İkinci Yaklaşması ve Kenar Kararması :

Güneş diski kenarda ortasına göre daha karanlıktır. Bu diğer yıldızlar için de doğrudur. Çift yıldız ışık eğrileri bunu göstermektedir. Işınım şiddetinin disk üzerindeki konuma göre değişmesi, ışınımın normale yaptığı θ açısına bağlılıktan ileri gelmektedir. Dolayısıyla I 'yı θ 'ya bağlı olarak bulmalıyız.

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- Dışa doğru ışınım şöyle veriliyordu:

$$I_{\nu}(\tau, \theta) = \int_{\tau}^{\infty} S_{\nu}(x) e^{-(x-\tau)\sec\theta} \sec\theta dx$$

Frekans üzerinden toplarsak,

$$I(\tau, \theta) = \int_{\tau}^{\infty} S(x) e^{-(x-\tau)\sec\theta} \sec\theta dx$$

yazabiliriz. Gri atmosfer ($\kappa = \text{sabit}$) durumunda $J = j/\kappa$ bulunmuştu. Yani kaynak fonksiyonu ortalama şiddet J 'ye eşittir. Bu durumda geçiş denklemini toplam ışınım için yazar ve $S(\tau) = J(\tau) = H(2 + 3\tau)$ koyup integre edersek,

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

$$I(\tau, \theta) = \int_{\tau}^{\infty} J(x) e^{-(x-\tau)\sec\theta} \sec\theta dx$$
$$= \int_{\tau}^{\infty} H(2+3x) e^{-(x-\tau)\sec\theta} \sec\theta dx$$

$$I(\tau, \theta) = 2H \int_{\tau}^{\infty} e^{-(x-\tau)\sec\theta} \sec\theta dx + 3H \int_{\tau}^{\infty} x e^{-(x-\tau)\sec\theta} \sec\theta dx + 3H$$

Burada $y = (x - \tau)\sec\theta$, $dy = dx\sec\theta$ dersek,

$$= 2H \int_0^{\infty} e^{-y} dy + 3H \int_0^{\infty} (\tau + y \cos\theta) e^{-y} dy$$
$$= 2H (-e^{-y}) \Big|_0^{\infty} + 3H \tau (-e^{-y}) \Big|_0^{\infty} + 3H \cos\theta \int_0^{\infty} y e^{-y} dy$$

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

$$= 2H + 3H\tau + 3H \cos\theta \left[(-ye^{-y})_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-y} dy \right]$$

$$= 2H + 3H\tau + 3H \cos\theta(0+1)$$

$$I(\tau, \theta) = H(2 + 3\tau + 3\cos\theta) \quad \dots\dots(35a)$$

Aynı işlemi içe doğru ışınım için yaparsak,

$$I'(\tau, \Psi) = \int_0^{\tau} J(x) e^{-(\tau-x)\sec\Psi} \sec\Psi dx$$

$$= \int_0^{\tau} H(2 + 3x) e^{-(\tau-x)\sec\Psi} \sec\Psi dx$$

$$= H \left[(2 - 3\cos\Psi)(1 - e^{-\tau\sec\Psi}) + 3\tau \right] \quad \dots\dots(35b)$$

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

(35a)'yı **yüzeiden çıkan ışınım** için yazarsak ($\tau=0$)

$$I(0,\theta) = H(2+3\cos\theta) \quad \dots\dots(35c)$$

Bu ifadeden,

$$I(0,0) = 5H, \quad I(0,\pi/2) = 2H$$

bulunur. Bunları (30)'dan elde edilen $I_1(0)=4H$ ile

karşılaştırırsak $\cos\theta=2/3$ iken **Eddington'un ilk yaklaştırmaları ile (35c) aynı sonucu verdiğini görürüz.**

Beklenildiği gibi, θ **arttıkça şiddet azalmaktadır.** Bu kenar kararmasının etkisi, $I(0,\theta) / I(0,0)$ oranı hesaplanarak görülebilir :

$$\frac{I(0,\theta)}{I(0,0)} = \frac{2}{5} \left(1 + \frac{3}{2} \cos\theta \right) \quad \dots\dots(36)$$

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

- Bu denklemin verdiği değerler ile gözlenen değerler Güneş için aşağıdaki çizelgede verilmektedir.

$\cos\theta$	Gözlenen	Eddington Yaklaşması	Tam Çözüm (Chandrasekhar)
1,00	1,00	1,00	1,00
0,90	0,944	0,940	0,939
0,80	0,898	0,880	0,878
0,70	0,842	0,820	0,816
0,60	0,788	0,760	0,755
0,50	0,730	0,700	0,692
0,40	0,670	0,640	0,629
0,30	0,602	0,580	0,565
0,20	0,522	0,520	0,499
0,10	0,450	0,460	0,429
0,00	-	0,400	0,344

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

Görüldüğü gibi basit kuramın öngördüğü kenar kararması gereğinden büyük, ancak genellikle gözlemlerle uyuşmaktadır ve bu da Güneş atmosferinde ışınasal dengenin (ışınım dengesinin) varlığını göstermektedir.

Burada şu noktalar unutulmamalıdır: Toplam ışınımdaki kenar kararması, $I_{\nu}(0,\theta)/I_{\nu}(0,0)$ tek renk değerlerden ve gözlenen enerji dağılımından bulunmak zorundadır. İkincisi Güneş maddesi gri değildir, bu nedenle gri cisim enerji dağılımı Güneş için geçerli olmayabilir.

Tek renklerle karşılaştırma yapılırsa uyumun böyle iyi olmadığı görülür.

11. IŞINIM GEÇİŞ DENKLEMİ (DEVAM)

$I_v(\tau, \theta) / I_v(\tau, 0)$ nun verilen bir optik derinlikte θ nın fonksiyonu olarak grafiği çizilirse salınan ışınımın eşyönlülükten ne kadar saptığını görebiliriz. τ ne kadar büyükse, yani yıldız içinde ne kadar derinde isek, ışınım o kadar eşyönlüdür, çünkü τ arttıkça $\cos\theta$ teriminin katkısı gittikçe azalır. Fiziksel olarak bu demektir ki, **iç kısımlarda ışınım karacisim ışınımına daha yakındır, yani YTD iç kısımlarda daha büyük oranda sağlanmaktadır.**