12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

- **12.3. Ortalama Soğurma Katsayıları:**
- Gri atmosferin gri olmayan atmosferle benzerliği ya da ilişkisi araştırılabilir. **Gri atmosfer** için geçiş denklemi tam olarak çözülebildiğinden bu önemlidir. Öyle bir ortalama soğurma katsayısı tanımlanmalı ki geçiş denklemi frekans üzerinden integre edildiğinde gri denkleme tam olarak eşit olsun. Bunun için çeşitli tanımlar yapılmıştır.
- Geçiş denkleminden

$$\cos\theta \frac{dI_\nu}{\kappa_\nu \rho dx} = -I_\nu + \frac{j_\nu}{\kappa_\nu}$$

- cosθ ile çarpılıp bütün katı açı üzerinden integre edilirse,

$$\int_\omega \cos^2\theta \frac{dI_\nu}{\kappa_\nu \rho dx} d\omega = -\int_\omega \cos\theta I_\nu d\omega + \int_\omega \cos\theta \frac{j_\nu}{\kappa_\nu} d\omega$$

12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

- j_ν ve κ_ν, $\boldsymbol{\omega}$ dan bağımsız olduğuna göre ve $\int_\omega \cos\theta d\omega = 0$ olduğundan,

$$4\pi \frac{1}{\kappa_\nu} \cdot \frac{dK_\nu}{\rho.dx} = -4\pi.H_\nu$$

$$\frac{dK_\nu}{\rho.dx} = -\kappa_\nu H_\nu$$

- yazılabilir. **Gri durumda** olduğu gibi, ν üzerinden integre edersek,

$$-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dK}{dx} = \int_0^\infty \kappa_\nu H_\nu d\nu$$

12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

- Şimdi öyle bir $\overline{\kappa}$ tanımlayalım ki aşağıdaki şartı sağlasın:

$$\overline{\kappa}\int_0^\infty H_\nu d\nu = \int_0^\infty \kappa_\nu H_\nu d\nu$$

(**Buna akı ağırlıklı ortalama denir**.)

yani,

$$\overline{\kappa}_A = \frac{\int_0^\infty \kappa_\nu H_\nu d\nu}{H}$$

- Ortalama optik derinlik de $d\overline{\tau} = -\overline{\kappa}\rho.dx$ olduğuna göre yukarıdaki eşitlik

$$-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{d\kappa}{dx} = \int_0^\infty \kappa_\nu H_\nu d\nu = \overline{\kappa}_A\int_0^\infty H_\nu d\nu = \overline{\kappa}_A.H$$

12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

$$\frac{dK}{d\bar{\tau}} = H$$

- elde edilir. Bu, gri durumda elde edilen ile aynıdır. Böylece gri ve gri olmayan durumda toplam akının aynı olması sağlanmış olur.

$$\bar{\kappa}_P = \frac{1}{B}\int_0^\infty \kappa_\nu B_\nu d\nu$$

Planck ağırlıklı ortalama

$$\bar{\kappa}_J = \frac{1}{J}\int_0^\infty \kappa_\nu J_\nu d\nu$$

Şiddet ağırlıklı ortalama

12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

- **Rosseland Ortalaması:**
- Akı ağırlıklı ortalama başka bir şekilde de ifade edilebilir:

$$-\frac{1}{\kappa_\nu \rho}\cdot\frac{d\kappa_\nu}{dx} = H_\nu$$

- ifadesi bulunmuştu. Bütün frekanslar üzerinden integre edilirse,

$$-\frac{1}{\rho}\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu}\cdot\frac{d\kappa_\nu}{dx}\,d\nu = \int_0^\infty H_\nu\,d\nu = H$$

- Ortalama katsayı,

$$\frac{1}{\overline{\kappa}} = \int_0^\infty \frac{d\kappa_\nu}{dx}\,d\nu = \int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu}\cdot\frac{d\kappa_\nu}{dx}\,d\nu$$ şeklinde de tanımlanabilir.

12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

- κ_ν önceden bilinmediğinden (çünkü ışınım alanına bağlı) akı ağırlıklı donuklukta olduğu gibi yukarıdaki formülden ortalama soğurma katsayısını hemen hesaplayamayız. Ancak atmosferin daha derin kısımlarında YTD geçerlidir ve $\mathbf{J}_\nu = \mathbf{B}_\nu$ alınabilir. Eddington yaklaştırmasında

$$\kappa_\nu = \frac{1}{3} J_\nu$$

- alınabilir (Toplam ışınım için bulduğumuzu tek renk ışınım için de doğru kabul ederek). Bu durumda,

$$\frac{1}{\overline{\kappa}} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \cdot \frac{d\kappa_\nu}{dx} d\nu}{\int_0^\infty \frac{d\kappa_\nu}{dx} d\nu} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \cdot \frac{dJ_\nu}{dx} d\nu}{\int_0^\infty \frac{dJ_\nu}{dx} d\nu}$$

12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

- κ_e ν'ye bağlı değildir ve κ_{bs} ile κ_{ss}'nin **u**'ya bağlılığı aynı olduğundan ikisini beraber alabiliriz.

$$\kappa(u) = \frac{D(u)}{u^3}$$ ün Rosseland ortalamasını alalım:

$$\frac{1}{\overline{\overline{\kappa}}} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa''} \cdot \frac{dB_\nu(T)}{dT} d\nu}{\int_0^\infty \frac{dB_\nu(T)}{dT} d\nu}$$

$$u = \frac{h\nu}{kT} \quad , \qquad d\nu = \frac{kT}{h} du \quad , \qquad \frac{du}{dT} = -\frac{1}{T} u$$

12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^u - 1}$$

$$\frac{dB_\nu(T)}{dT} = \frac{2h\nu^3}{c^2} e^u \frac{u}{T} \frac{1}{(e^u - 1)^2}$$

$$\frac{1}{\bar{\kappa}} = \frac{\dfrac{\cancel{2k}}{\cancel{c^2}} \displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\kappa''} \cdot \frac{\cancel{h\nu^3}}{\cancel{T}} \frac{u.e^u}{(e^u - 1)^2} \cdot \frac{k\cancel{T}}{\cancel{h}} du}{\dfrac{\cancel{2k}}{\cancel{c^2}} \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cancel{h\nu^3}}{\cancel{T}} \frac{u.e^u}{(e^u - 1)^2} \cdot \frac{k\cancel{T}}{\cancel{h}} du}$$

$$= \frac{\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\kappa''} \cdot \frac{u^4.e^u}{(e^u - 1)^2} du}{\displaystyle\int_0^\infty \frac{u^4.e^u}{(e^u - 1)^2} du}$$

12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

YTD de $\mathbf{J}_\nu=\mathbf{B}_\nu$ olduğundan ve

$$\frac{\partial B_\nu}{\partial x} = \frac{\partial B_\nu}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial x}$$

Olduğundan ve dT/dx de frekanstan bağımsız olduğuna göre,

$$\frac{1}{\overline{\kappa}} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \cdot \frac{dB_\nu}{dT} d\nu}{\int_0^\infty \frac{dB_\nu}{dT} d\nu}$$

Bu şekilde tanımlanan soğurma katsayısına **Rosseland ortalaması** denir. Görüleceği gibi ortalamanın harmonik olması, yani $1/\kappa_\nu$ nün ortalamasının alınması, donukluğun en az olduğu bölgelere en büyük ağırlığı verir.

Yani enerji geçişi daha kolay olur. Bu da istenen bir özelliktir.

12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

- **Rosseland Ortalama Donukluğu**

- Rosseland ortalamasını elde etmek için önce ayrı ayrı tek renk soğurma katsayılarını toplamalıyız:

$$\kappa(\nu)= \kappa_{bs}(\nu) + \kappa_{ss}(\nu) + \kappa_e$$

- Bu, toplam tek renk soğurma katsayısıdır. Bunu zorlama ile ışınım çarpanı

$$1-e^{-h\nu/kT}$$

- ile çarpıp Rosseland ortalamasını bulmak gerekir. Ancak,

12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

$$\frac{1}{\overline{\kappa}}=\frac{\int_0^\infty \frac{u^3}{D(u)}\cdot\frac{e^u.u^4}{(1-e^{-u})(e^u-1)^2}du}{\int_0^\infty \frac{e^u.u^4}{(e^u-1)^2}du}=\frac{\int_0^\infty \frac{1}{D(u)}\cdot\frac{u^7e^u du}{e^{-u}(e^u-1)(e^u-1)^2}}{\underbrace{4\int_0^\infty \frac{u^3du}{e^u-1}}_{\frac{\pi^4}{15}}}$$

$$\frac{1}{\overline{\kappa}}=\frac{15}{4\pi^4}\int_0^\infty \frac{1}{D(u)}\cdot\frac{u^7e^{2u}}{(e^u-1)^3}du$$

D(u) ardışık soğurma kenarları arasında sabit kaldığına göre $u_i>u>u_{i+1}$ aralığındaki değerini

D(u_i, u_{i+1})

ile gösterelim. Bu frekans aralığında integral dışına çıkarabiliriz.

12.YILDIZLARIN SÜREKLİ TAYFI(DEVAM)

$$\frac{1}{\overline{\kappa}} = \frac{15}{4\pi^4}\left[\frac{1}{D(u_0,\, u_1)}\int_{u_1}^{u_0=\infty}\frac{u^7 e^{2u}}{(e^u-1)^3}du + \frac{1}{D(u_1,\, u_2)}\int_{u_2}^{u_1}\frac{e^{2u}u^7 du}{(e^u-1)^3} + \frac{1}{D(u_2,\, u_3)}\int_{u_3}^{u_2}....+....\right]$$

$$\frac{1}{\overline{\kappa}} = \frac{15}{4\pi^4}\left[\frac{1}{D(u_0,\, u_1)}\int_{0}^{u_0=\infty}\frac{e^{2u}u^7}{(e^u-1)^3}du - \int_{0}^{u_1}\frac{e^{2u}u^7}{(e^u-1)^3}du\right] + ...+\frac{15}{4\pi^4}\frac{1}{D(u_{n-1},\, u_n)}\left(\int_{0}^{u_{n-1}} - \int_{0}^{u_n}\right)$$

$$\frac{1}{\overline{\kappa}} = \frac{15}{4\pi^4}\sum_{i=0}\frac{S(u_i)-S(u_{i+1})}{D(u_i,u_{i+1})}$$

Burada $\quad u_0 = \infty \;$ ve $\; S(u_i) = \int_0^{u_i}\frac{e^{2u}u^7}{(e^u-1)^3}du$

Strömgren, (15/(4π^4)).**S**(u) fonksiyonunu, **u**'nun çeşitli değerleri için çizelgeledi. Bu, verilen bir kimyasal bileşim için soğurma katsayısını hesaplamayı kolaylaştırdı.