

KÜRESEL TRİGONOMETRİ

Düzlemden küreye geçtiğimize göre, küre üzerindeki bir noktanın yerini belirten geometrik kon düzeneklerini tanımlamak gerekir. Genelde iki tür kon düzeneği kullanılır :

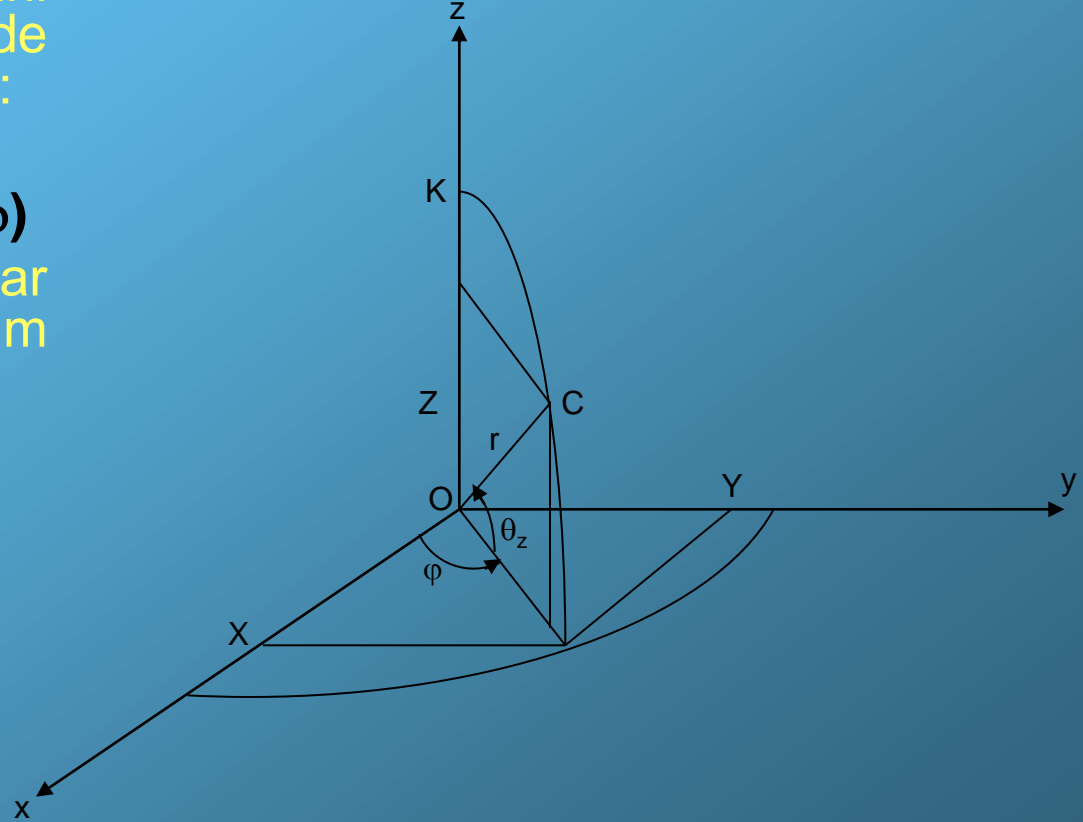
- 1- Dik kon düzeneği (x, y, z)
- 2- Kutupsal kon düzeneği (r, θ, φ)

Bu iki düzenepteki konsayılar arasında olan dönüşüm formülleri,

$$x=r \cos \theta \cos \varphi$$

$$y=r \cos \theta \sin \varphi$$

$$z=r \sin \theta$$



Kon düzeneği oluşturulurken yön önemlidir. Başlangıç noktasında duran bir gözlemcinin başının bulunduğu yönde Oz-ekseni alınırsa, diğer eksenler Ox ve Oy rasgele seçilebilirler. Şöyle ki, eğer Ox-yönünden Oy-yönüne doğru bir dönüş yapılırsa (+) yön [saatin dönmesinin tersi] ve bu düzenek “artı yönlü” kabul edilir. Karşıt durum için ise “eksi yönlü” kabul edilir. Genellikle “artı yönlü” düzenek dikkate alınır.

Artı yönlü düzeneği dikkate alarak, kutupsal düzenekte θ açısı kuzeye doğru 0° ile $+90^\circ$ ve güneye doğru 0° ile -90° arasında ve φ açısı da (+) yönde 0° ile 360° arasında ölçülür. Gök küresi söz konusu ise, küre yarıçapı $r=1$ birim alınır. Bu durumda bir C noktasının yeri (θ, φ) gibi iki açıyla anlamlı olarak belirtilebilir.

Burada xOy nin belirttiği düzleme TEMEL DÜZLEM, onun küre ile arakesitine de TEMEL ÇEMBER denir.

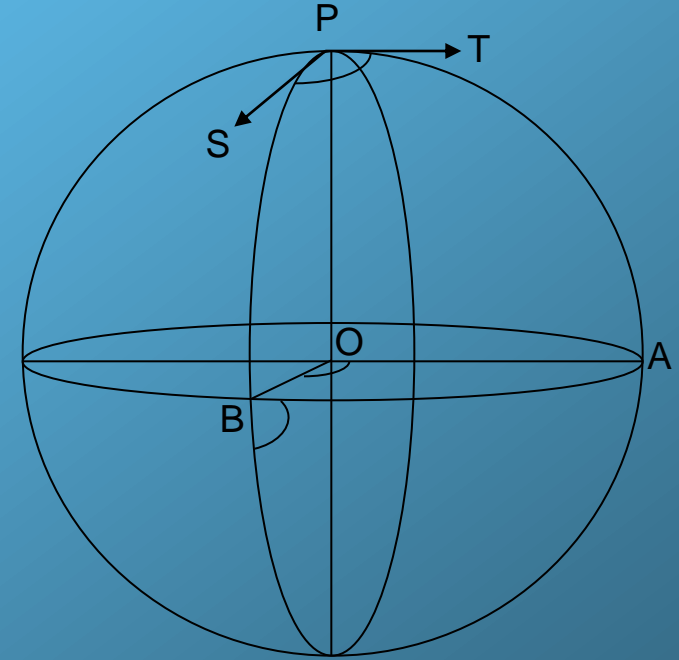
Artı düzenekte Oz - nin kuzeyi deldiği nokta “artı kutup”, Gökbilimde ise “Kuzey kutup”, diğeri ise “eksi kutup” ya da “Güney kutup” olur.

BÜYÜK DAİRE :Kürenin merkezinden geçen düzlem ile kürenin arakesitidir.

KÜÇÜK DAİRE :Küreyi herhangi bir yerinden kesen düzlemle kürenin arakesitidir.

KUTUP(UÇLAK) NOKTALARI :Herhangi bir büyük daire düzleminin merkezinden geçen dik doğrultunun küreyi kestiği noktalardır.

KÜRESEL AÇI : İki büyük çember birbirlerini keserlerse, kesim noktasında bir küresel açı ortaya çıkar. Bu küresel açı, kesişen bu iki çemberin düzlemlerinin arasındaki İKİ DÜZLEMLİ açıdır.



$$PS \perp OP, \hat{SPT} = \hat{BOA}$$

KÜRESEL ÜÇGEN

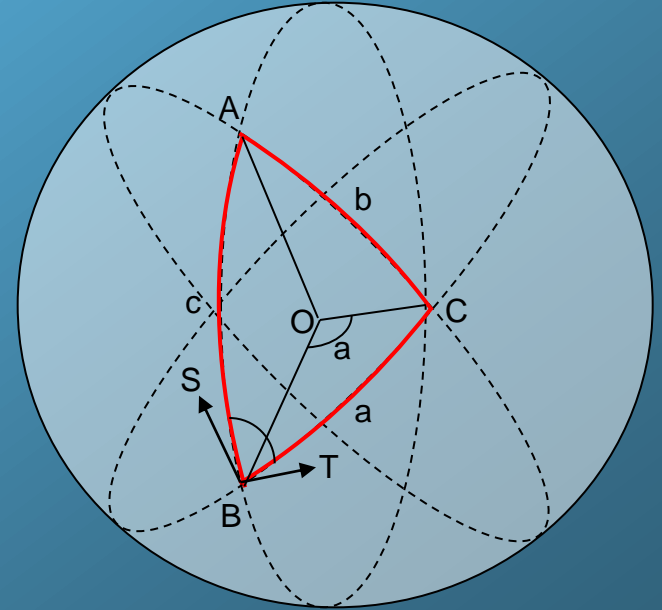
TANIM : Küre üzerinde herhangi üç nokta, ve bu noktaları üzerinde buldukları yarı küre üzerinde BÜYÜK ÇEMBER'ler düzlemleri ile birleştirildiğinde elde edilen geometrik şekle **Basit Küresel Üçgen** denir.

\hat{B} acisi (OBC) ile (OBA) düzlemleri arasındaki ölçü açıdır (iki düzlemlilik açısı):

$$\hat{B} = \hat{SBT}$$

Kenarlar da açı ile ölçülür. $\hat{BOC} = a$, $\hat{AOC} = b$,

$$\hat{AOB} = c .$$



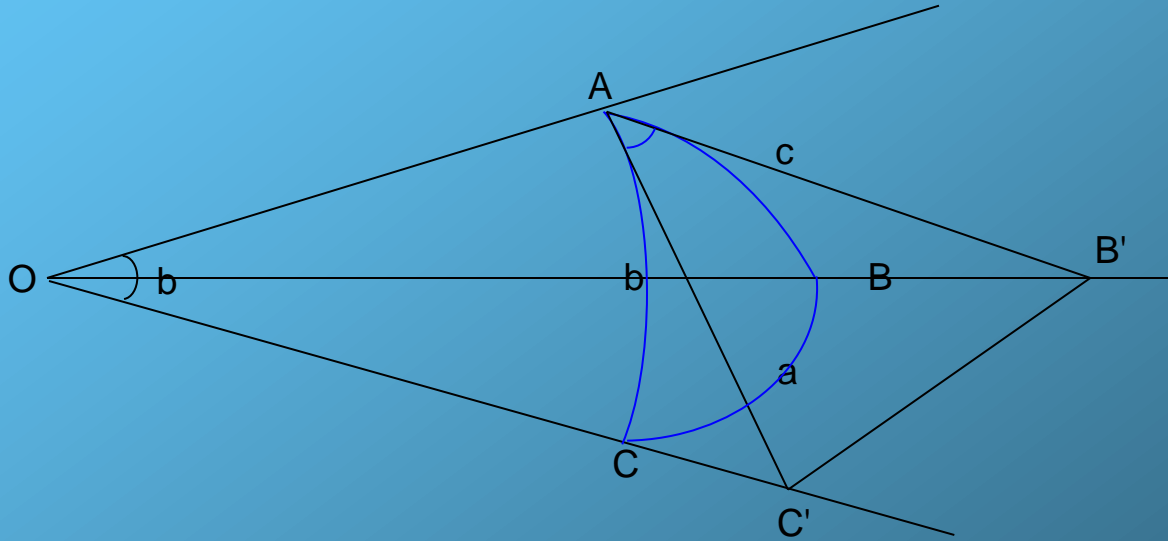
Küresel üçgenin her iç açısı 180° den küçüktür. Bu da basit küresel üçgen olma sonucudur. Diğerlerinden kiminin iki kenarı 180° den küçük bir kenarı 180° den büyüktür.

TEOREM : Bir küresel üçgenin iç açılarının toplamı 180° den büyük 540° den küçüktür. Yani bir ABC küresel üçgeninde

$$180^\circ < \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 540^\circ \quad \text{dir.}$$

İspat :

ABC küresel üçgenin iç açılarıyla $AB'C'$ düzlem üçgeninin iç açılarını karşılaştıralım.



B açısı iki düzlemlidir. Yani iki düzlem arasındaki en büyük açıdır. Çünkü bu açı **a** ve **c** yaylarına çizilen iki teğet arasındaki açıyla belirlenmiştir. Oysa **B'** açısının kenarları **OB** arakesitine göre eğiktir. Onun için **B'** açısı **B** ölçek açısından küçüktür. Gerçekten **B'** noktasını sonsuza doğru götüreceğiz olursak **B'** nün giderek küçülüp sifira yaklaştığını görürüz.

Aynı değerlendirme **C** açısı ile **C'** açısı için de yapılabilir. Sonuç olarak,

$$\hat{A} = \hat{A}$$

$$\hat{B} > \hat{B}'$$

$$\hat{C} > \hat{C}'$$

+ +

$$A + B + C > \underbrace{A + B' + C'}_{180^\circ} \Rightarrow A + B + C > 180^\circ \text{ bulunur.}$$

Dolayisiyle,

$$A < 180^\circ$$

$$B < 180^\circ$$

$$C < 180^\circ$$

+ +

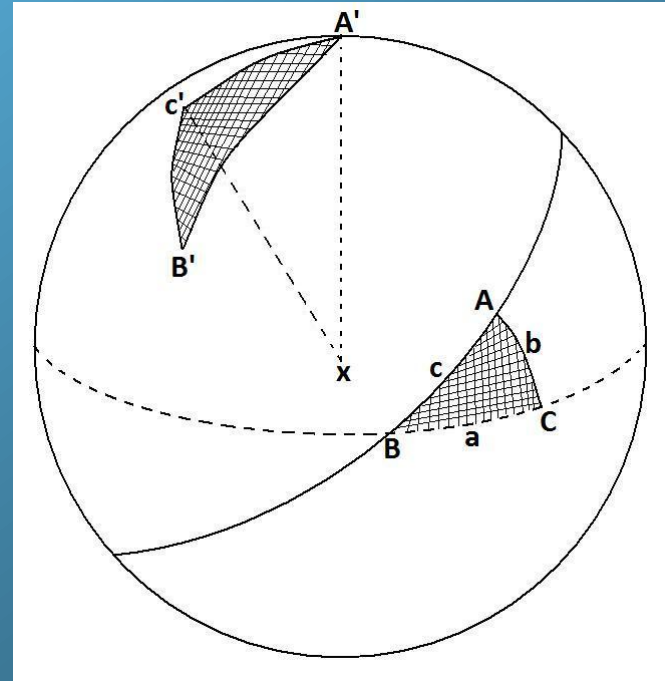
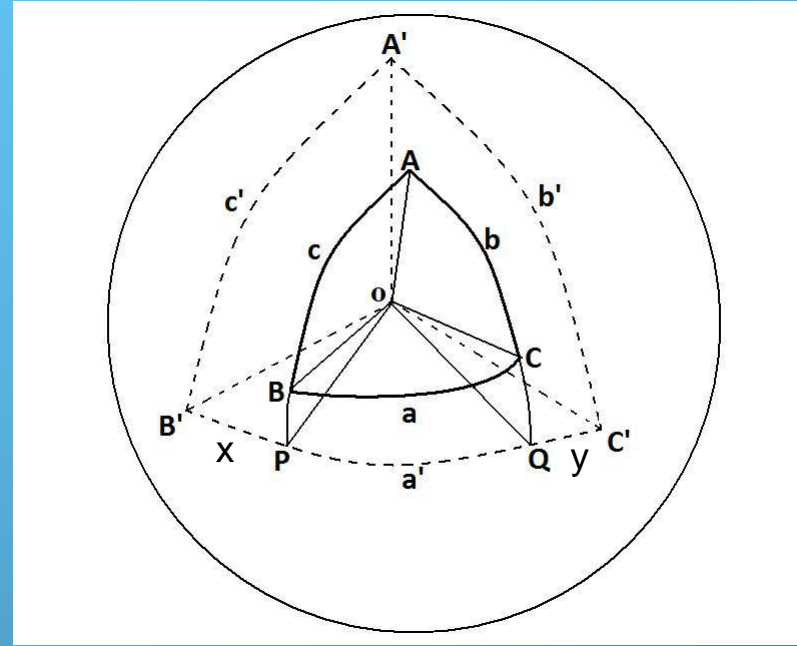
$A + B + C < 540^\circ$ bulunur. Yani,

$180^\circ < A + B + C < 540^\circ$ dir.

Önemli bir kaç özelliği açıklamada yararlı olan “Kutupsal üçgen” tanımı şöyledir : Üçgenin bir kenarının bulunduğu daireye küre merkezinden çıkılan dikme küreyi iki noktada deler. Bu noktalardan her biri üçgenin bir kenarının “kutup noktası” veya “kutbu” denir. Bu tanıma göre bir küresel üçgenin altı tane kutbu vardır. Bu kutup noktaları üçer üçer birleştirilerek bir çok küresel üçgen oluşturmak mümkündür. Fakat bunların içinde bizim dikkate aldığımız üçgenin karşı tarafında üç kutup noktadan oluşan basit küresel üçgen bulunabilir. Buna “Kutupsal üçgen” denir.

ABC bir küresel üçgen ise bu küresel üçgenin $A'B'C'$ gibi bir kutupsal üçgeni vardır. Burada a nın kutbu denilince A' noktası akla gelmelidir. Öbür kutup dikkate alınmaz.

Bu üçgenler arasında ilginç özellikler vardır.



C' noktası AB kenarının kutup noktasıdır.

a nin kutup noktası A' ise

b nin kutup noktası B' ise

c nin kutup noktası C' ise

$A'B'C'$ üçgenine ABC küresel üçgenin KUTUPSAL ÜÇGENİ denir.

TEOREM : $A'B'C'$ küresel üçgeni ABC küresel üçgenin kutupsal üçgeni ise, ABC küresel üçgeni de $A'B'C'$ küresel üçgeninin kutupsal üçgenidir.

İspat :

a kenarının kutup noktası A'

b kenarının kutup noktası B'

c kenarının kutup noktası C' ise,

a' kenarının kutup noktası A

b' kenarının kutup noktası B

c' kenarının kutup noktası C olduğunu gösterirsek.

Şekilden,

$OB' \perp (OAC)$ düzlemine $\rightarrow OB' \perp OA$

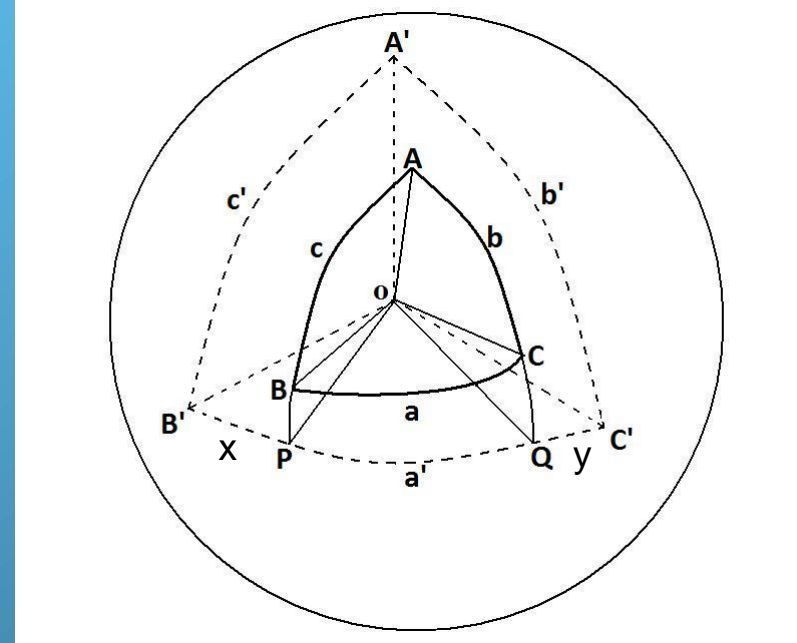
$OC' \perp (OAB)$ düzlemine $\rightarrow OC' \perp OA$

O halde $OA \perp (OB'C')$ düzlemine,
yani A noktası

$B'C'$ yayı = a' kenarının kutbudur.
Benzer şekilde B köşesinin de b'
kenarının, C köşesinin de c'
kenarının kutupları olduğunu
gösterebiliriz. Örneğin $B \rightarrow b'$ için;

$OB \perp (OA'C')$ $\rightarrow OB \perp OC'$

$OB \perp (OC'A')$ $\rightarrow OB \perp OA'$ gibi.



TEOREM : $A'B'C'$ küresel üçgeni ABC üçgeninin kutupsal üçgeni ise, bu iki üçgenin kenarları ve açıları arasında $A+a'=180^\circ$, $B+b'=180^\circ$, $C+c'=180^\circ$ ve $a+A'=180^\circ$, $b+B'=180^\circ$, $c+C'=180^\circ$ bağıntıları vardır.

İspat : a) Şekilden yararlanarak,

$OA \perp (OB'C') \rightarrow OA \perp OP$ aynı zamanda $OA \perp OQ$,

O zaman $\widehat{PÔQ} = \widehat{A}$ oluyor.

$OB' \perp (AOC) \rightarrow OB' \perp OQ \rightarrow \widehat{B'ÔQ} = 90^\circ$

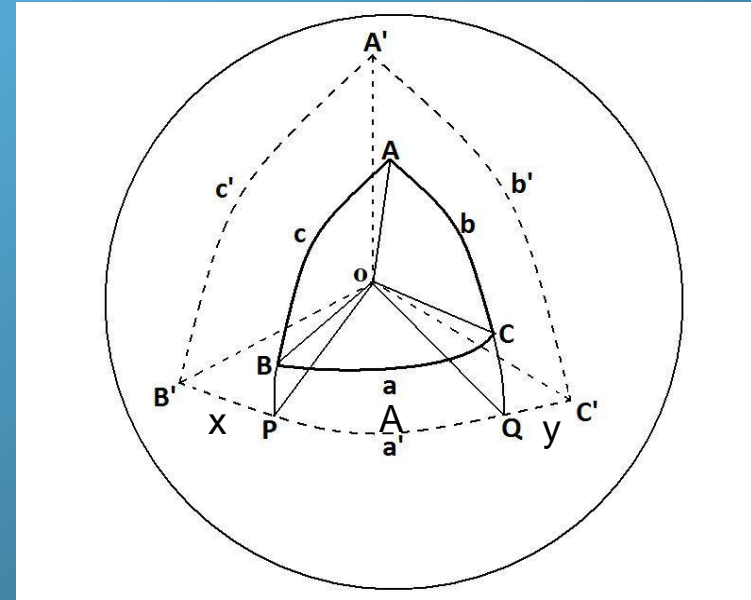
$\widehat{B'ÔP} = x$, $\widehat{B'ÔQ} = x + A = 90^\circ$

$OC' \perp (AOB) \rightarrow OC' \perp OP \rightarrow \widehat{C'ÔP} = 90^\circ$

$\widehat{C'ÔQ} = y$, $\widehat{C'ÔP} = y + A = 90^\circ$

$$x + A = 90^\circ$$

$$y + A = 90^\circ$$



$$\underbrace{x + y + A + A}_{a' = \widehat{B'ÔC'}} = 180^\circ \Rightarrow a' + A = 180^\circ \quad \text{bulunur.}$$

Benzer yoldan $b'+B = 180^\circ$ ve $c'+C = 180^\circ$ olduğu gösterilebilir.

b) OL doğrusu $(OA'B')$ düzleminde,
OM doğrusu $(OA'C')$ düzleminindedir.
O halde bu iki düzlemin arakesiti OA' dür. Diğer
taraftan,

OL , (OBC) içinde,
OM, (OBC) içindedir.

A' noktası a kenarının kutbu $\rightarrow OA' \perp (OBC)$

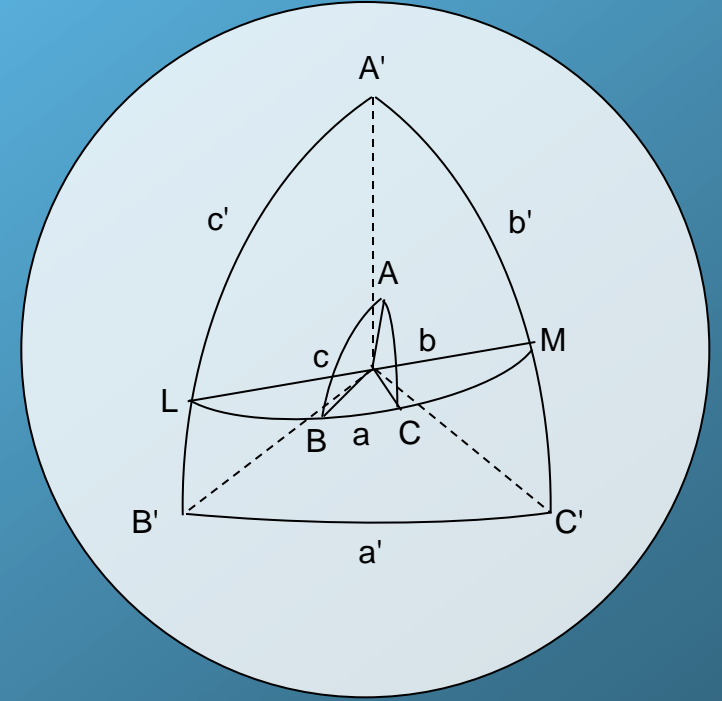
$$OA' \perp OL$$

$$OA' \perp OM$$

$\hat{L}OM$ açısı $(A'OB')$ ile $(A'OC')$ düzlemleri
arasındaki ölçek açıdır. Yani $\hat{L}OM = \hat{A}$ dir.

$B \rightarrow b' \rightarrow OB \perp (OA'C') \rightarrow OB \perp OM$, $\hat{B}OM = 90^\circ$

$C \rightarrow c'$ nün kutbu $\rightarrow OC \perp (OA'B') \rightarrow OC \perp OL$,
 $\hat{C}OL = 90^\circ$



$$\widehat{BOM} = \widehat{BOC} + \widehat{COM} = 90^\circ$$

$$\widehat{COL} = \widehat{COB} + \widehat{BOL} = 90^\circ$$

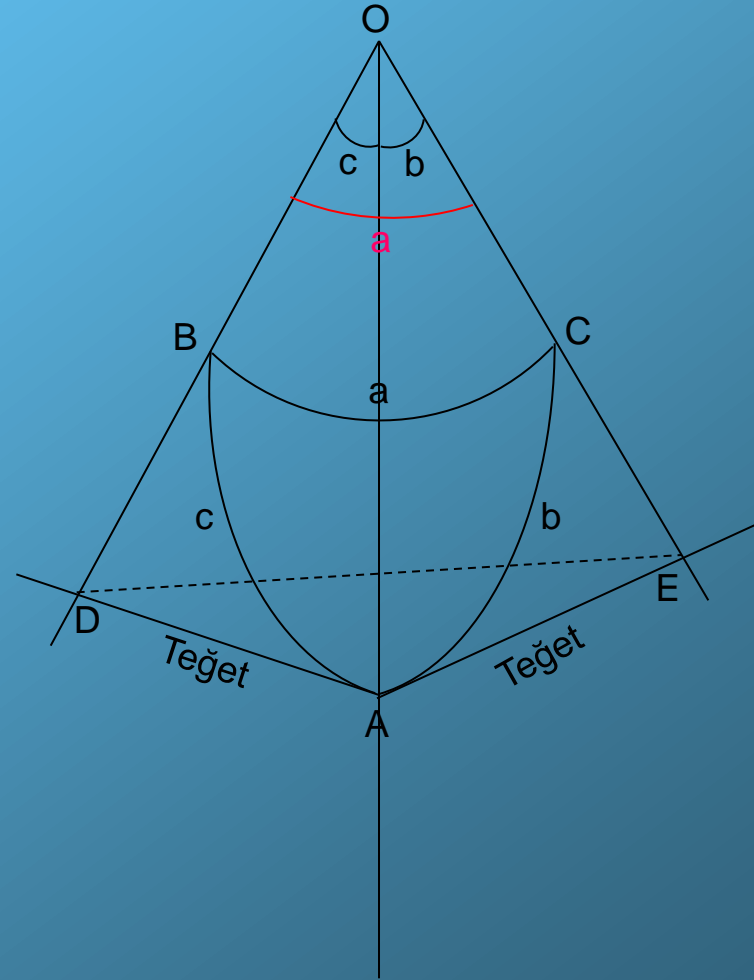
+

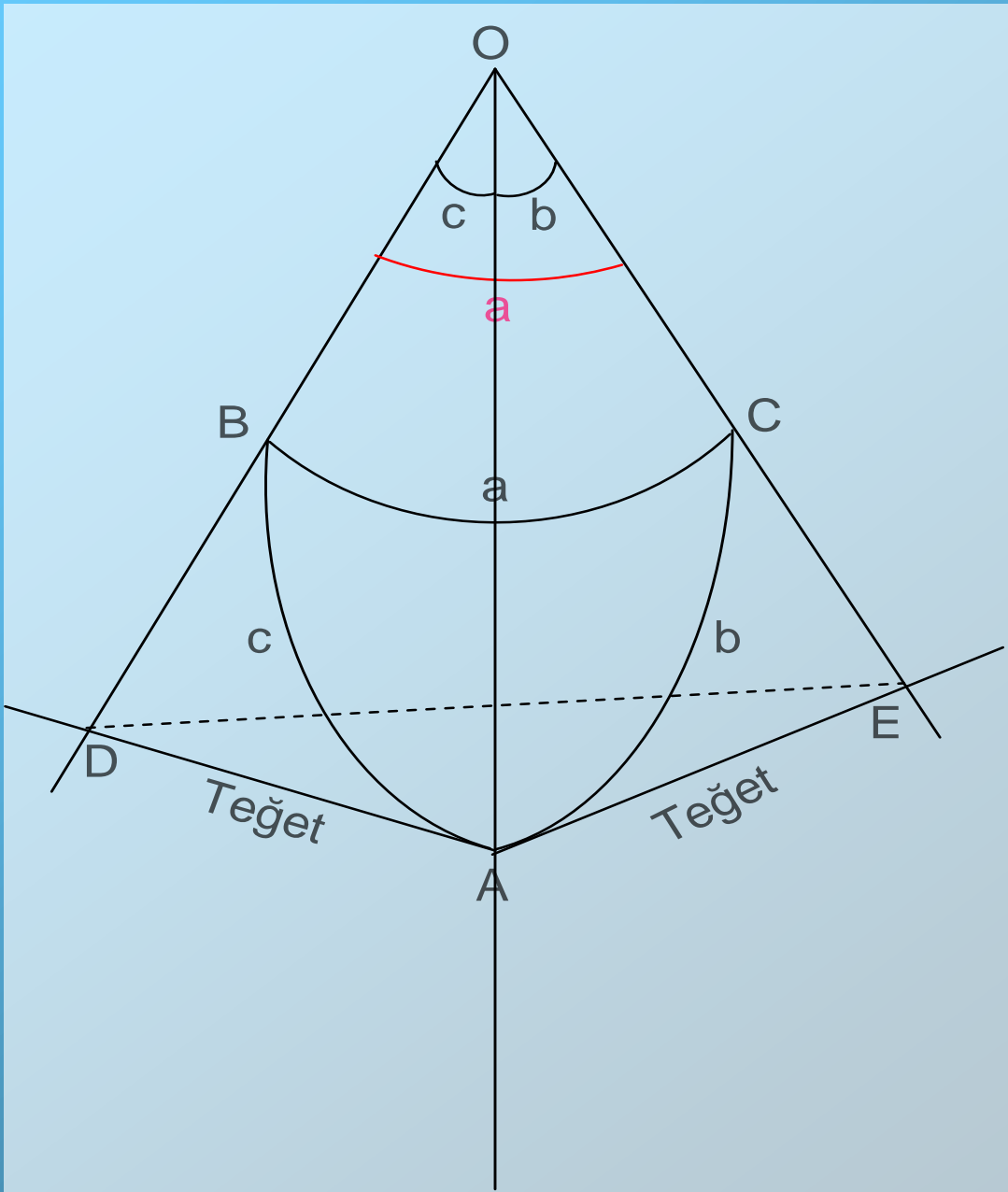
$$\underbrace{\widehat{BOC} + \widehat{COM} + \widehat{BOL}}_{\widehat{LOM}=A'} + \underbrace{\widehat{COB}}_a = 180^\circ \quad \Rightarrow A' + a = 180^\circ$$

olduğu görülür. Aynı yoldan $B' + b = 180^\circ$ ve $C' + c = 180^\circ$ olduğu gösterilebilir.

Küresel üçgende Temel Formüller

Gökbilim hesapları için küresel üçgenlerin kenarlarıyla açıları arasındaki bağıntıların bilinmesi gerekir. Düzlem trigonometri tanımları ve formüllerinden yararlanarak, doğrudan doğruya küresel üçgenden çıkarılan ilk formüllere **temel formüller** denir. Daha sonra bu temel formüllerden çıkarılanlara da ikincil formüller denir.





$\triangle OAD$ ve $\triangle OAE$ dik ucgenlerinde;

$$\tan c = \frac{AD}{OA} \Rightarrow AD = OA \tan c$$

}.....(1)

$$\cos c = \frac{OA}{OD} \Rightarrow OD = \frac{OA}{\cos c} = OA \sec c$$

$$\tan b = \frac{AE}{OA} \Rightarrow AE = OA \tan b$$

}.....(2)

$$\cos b = \frac{OA}{OE} \Rightarrow OE = OA \sec b$$

ΔDAE düzlem üçgeninde;

$$\overline{DE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 - 2AD \cdot AE \cos A$$

(1) ve (2) den yararlanarak,

$$\overline{DE}^2 = OA^2 \tan^2 c + OA^2 \tan^2 b - 2OA^2 \tan c \tan b \cos A \text{ olur.}$$

$$\overline{DE}^2 = OA^2 (\tan^2 c + \tan^2 b - 2 \tan c \tan b \cos A) \quad \dots(3)$$

ΔDOE düzlem üçgeninde;

$$\overline{DE}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{OE}^2 - 2OD \cdot OE \cos a$$

(1) ve (2) den yararlanarak,

$$\overline{DE}^2 = OA^2 \sec^2 c + OA^2 \sec^2 b - 2OA^2 \sec c \sec b \cos a$$

$$\overline{DE}^2 = OA^2 (\sec^2 c + \sec^2 b - 2 \sec c \sec b \cos a) \quad \dots(4)$$

(3) ve (4) den,

$$\sec^2 b + \sec^2 c - 2 \sec b \sec c \cos a = \tan^2 b + \tan^2 c - 2 \tan b \tan c \cos A$$

$$\sec^2 b = 1 + \tan^2 b \quad , \quad \sec^2 c = 1 + \tan^2 c \quad \text{koyarsak,}$$

$$1 + \tan^2 b + 1 + \tan^2 c - 2 \sec b \sec c \cos a = \tan^2 b + \tan^2 c - 2 \tan b \tan c \cos A$$

$$2 - \frac{2 \cos a}{\cos b \cos c} = -2 \frac{\sin b \sin c}{\cos b \cos c} \cos A$$

$$-\frac{2 \cos a}{\cos b \cos c} = -2 \frac{\sin b \sin c}{\cos b \cos c} \cos A - 2$$

$$\pm 2 \cos a = \pm 2 \sin b \sin c \cos A \pm 2 \cos b \cos c$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

bulunur ki bu, kuresel ucgende kenara iliskin

cos teoremidir. Bunun gibi,

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \quad \text{yazilabilir.}$$

Sinüs Formülü

Bu formül cosinüs formülünden yararlanarak çıkarılabilir :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$\sin b \sin c \cos A = \cos a - \cos b \cos c$$

Her iki tarafın karesi alınırsa,

$$\sin^2 b \sin^2 c \underbrace{\cos^2 A}_{1-\sin^2 A} = \cos^2 a - 2 \cos a \cos b \cos c + \cos^2 b \cos^2 c$$

$$\underbrace{\sin^2 b}_{1-\cos^2 b} \underbrace{\sin^2 c}_{1-\cos^2 c} - \sin^2 b \sin^2 c \sin^2 A = \cos^2 a - 2 \cos a \cos b \cos c + \cos^2 b \cos^2 c$$

$$1 - \cos^2 b - \cos^2 c + \cos^2 b \cos^2 c - \sin^2 b \sin^2 c \sin^2 A =$$

$$\cos^2 a - 2 \cos a \cos b \cos c + \cos^2 b \cos^2 c$$

$$\sin^2 b \sin^2 c \sin^2 A = 1 - \cos^2 c - \cos^2 b - \cos^2 a + 2 \cos a \cos b \cos c \quad \dots(1)$$

Şimdi, öyle bir (+) değerli bir x niceliği olsun ki,
 $x^2 \sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c = 1 - \cos^2 c - \cos^2 b - \cos^2 a + 2 \cos a \cos b \cos c \dots(2)$
olsun.

(1) ve (2) karşılaştırılırsa,

$$x^2 \sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c = \sin^2 b \sin^2 c \sin^2 A$$

$$x^2 \sin^2 a = \sin^2 A \Rightarrow x^2 = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} \Rightarrow x = \mp \frac{\sin A}{\sin a}$$

Küresel üçgende $a > 0^\circ$, $A < 180^\circ$ dir.

Yani sin lerin değeri (+) dir. O halde,

$$x = \frac{\sin A}{\sin a} \quad \text{olur.}$$

$$b \text{ kenari için } x = \frac{\sin B}{\sin b}$$

$$c \text{ kenari için } x = \frac{\sin C}{\sin c}$$

Bu ifadelerden de,

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

elde edilir ki buna Sinüs formülü denir.

Sinüs(kenar)xKosinüs(açı) formülü

b kenarına ilişkin cos formulu;

$$\cos b = \cos a \cos c + \underbrace{\sin a \sin c \cos B}_{\text{yalnız bırakırsak}}$$

$$\sin a \sin c \cos B = \cos b - \underbrace{\cos a}_{\text{cos formulu yaz.}} \cos c$$

$$\begin{aligned}\sin a \sin c \cos B &= \cos b - \cos c (\cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A) \\ &= \cos b - \cos^2 c \cos b - \sin b \sin c \cos c \cos A \\ &= \cos b \underbrace{(1 - \cos^2 c)}_{\sin^2 c} - \sin b \sin c \cos c \cos A\end{aligned}$$

$$\sin a \sin c \cos B = \cos b \sin^2 c - \sin b \sin c \cos c \cos A$$

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \quad \text{bulunur.}$$

Benzer şekilde,

$$\sin a \cos C = \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A$$

$$\sin b \cos C = \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos B$$

$$\sin b \cos A = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B$$

$$\sin c \cos A = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C$$

$$\sin c \cos B = \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C$$

Kosinüs(kenar)xKosinüs(açı) formülü ;

$$\cos b = \cos a \underbrace{\cos c}_{\text{cos formulu koy.}} + \sin a \sin c \cos B$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \quad \text{idi,}$$

$$\cos b = \cos^2 a \cos b + \cos a \sin a \sin b \cos C + \sin a \sin c \cos B$$

$$\cos b - \cos^2 a \cos b = \cos b(1 - \cos^2 a) = \cos b \sin^2 a$$

$$\cos b \sin^2 a = \sin a \sin b \cos a \cos C + \sin a \sin c \cos B$$

Her iki yani $(\sin a \sin b)$ ye bolunurse,

$$\cot b \sin a = \underbrace{\cos a \cos C}_{\text{cekilirse}} + \frac{\sin c}{\sin b} \cos B$$

$$\cos a \cos C = \cot b \sin a - \frac{\sin c}{\sin b} \cos B$$

$$\frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} \quad \text{idi} \Rightarrow \frac{\sin b}{\sin c} = \frac{\sin B}{\sin C} \quad \text{kullanilirsa,}$$

$$\cos a \cos C = \cot b \sin a - \cot B \sin C \quad \text{elde edilir.}$$

Benzer sekilde,

$$\cos b \cos C = \cot a \sin b - \cot A \sin C$$

$$\cos b \cos A = \cot c \sin b - \cot C \sin A$$

$$\cos c \cos A = \cot b \sin c - \cot B \sin A$$

$$\cos c \cos B = \cot a \sin c - \cot A \sin B$$

$$\cos a \cos B = \cot c \sin a - \cot C \sin B$$

yazilabilir.

A'B'C' küresel üçgeni ABC küresel üçgeninin uçlaklar üçgeni ise, bu iki üçgenin ögeleri arasında $a'+A=180^\circ$ ve $A'+a=180^\circ$ gibi bağıntılar vardır. Bu özellikten yararlanarak diğer formüller bulunabilir :

Açılar için cos formülü ;

cos(kenar) formüllerinden yararlanarak,

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

Burada a, b, c ve A nin uçlaklar cinsinden değerleri yazılırsa,

$$\cos(180-A') = \cos(180-B')\cos(180-C') + \sin(180-B')\sin(180-C')\cos(180-a')$$

$$-\cos A' = +\cos B' \cos C' - \sin B' \sin C' \cos a'$$

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \quad \text{bulunur.}$$

Benzer şekilde,

$$\cos B = -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b$$

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c \quad \text{yazılabilir.}$$

sin(açı)xcos(kenar) formülleri ;

sin (kenar) x cos (açı) formüllerinden yararlanarak,

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \quad \text{idi.}$$

yine uçlaklar üçgen özelliğini kullanarak,

$$\sin (180-A') \cos (180-b') = \cos (180-B') \sin (180-C') - \sin (180-B') \cos (180-C') \cos (180-a')$$

$$- \sin A' \cos b' = - \cos B' \sin C' - \sin B' \cos C' \cos a'$$

$$\sin A \cos b = \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a \quad \text{bulunur.}$$

Benzer şekilde,

$$\sin A \cos c = \cos C \sin B + \sin C \cos B \cos a$$

$$\sin B \cos a = \cos A \sin C + \sin A \cos C \cos b$$

$$\sin B \cos c = \cos C \sin A + \sin C \cos A \cos b$$

$$\sin C \cos a = \cos A \sin B + \sin A \cos B \cos c$$

$$\sin C \cos b = \cos B \sin A + \sin B \cos A \cos c \quad \text{yazılabilir.}$$

Kenarı veya açısı 90° olan Küresel üçgende bağıntılar

Bir açısı 90° olan küresel üçgene “Dik üçgen” denir.

DİK AÇILI KÜRESEL ÜÇGEN

ABC küresel üçgeninde $A=90^\circ$ olsun.

1- Kenar için cos teoremi,

$$\cos a = \cos b \cos c + \underbrace{\sin b \sin c \cos A}_0$$

$$\cos a = \cos b \cos c \quad \dots(1)$$

2- Sinüs formülü,

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} \quad , A = 90^\circ \text{ ise,}$$

$$\sin b = \sin a \sin B \quad \dots(2)$$

$$\sin c = \sin a \sin C \quad \dots(3)$$

3- sin(kenar) x cos(açı) formülü,

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \underbrace{\sin b \cos c \cos A}_0$$

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c$$

$$\cos B = \cos b \frac{\sin c}{\underbrace{\sin a}_{\sin C \text{ (3)'den}}} \Rightarrow \cos B = \cos b \sin C \quad \dots(4)$$

$$\sin a \cos C = \cos c \sin b - \underbrace{\sin c \cos b \cos A}_0$$

$$\sin a \cos C = \cos c \sin b$$

$$\cos C = \cos c \frac{\sin b}{\underbrace{\sin a}_{\sin B \text{ (2)'den}}} \Rightarrow \cos C = \cos c \sin B \quad \dots(5)$$

$$\underbrace{\sin b \cos A}_0 = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B$$

$$\cos a \sin c = \sin a \cos c \cos B$$

$$\cos B = \cot a \tan c \quad \dots(6)$$

$$\underbrace{\sin c \cos A}_0 = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C$$

$$\cos a \sin b = \sin a \cos b \cos C$$

$$\cos C = \cot a \tan b \quad \dots(7)$$

4- $\cos(\text{kenar}) \times \cos(\text{açı})$ formülü,

$$\underbrace{\cos b \cos A}_0 = \sin b \cot c - \underbrace{\sin A}_1 \cot C$$

$$\sin b = \tan c \cot C \quad \dots(8)$$

$$\sin c = \tan b \cot B \quad \dots(9)$$

5- $\sin(\text{açı}) \times \cos(\text{kenar})$ formülü,

$$\sin B \cos a = \underbrace{\cos A \sin C}_0 + \underbrace{\sin A}_1 \cos C \cos b$$

$$\sin B \cos a = \cos C \cos b \quad \dots(10)$$

$$\sin C \cos a = \underbrace{\cos A \sin B}_0 + \underbrace{\sin A}_1 \cos B \cos c$$

$$\sin C \cos a = \cos B \cos c \quad \dots(11)$$

(10) ve (11) taraf tarafa bolunurse,

$$\frac{\sin B \cos a}{\cos B \cos c} = \frac{\cos C \cos b}{\sin C \cos a}$$

$$\tan B \frac{\cos a}{\cos c} = \cot C \frac{\cos b}{\cos a}$$

$$\cos a = \cot B \cot C \frac{\cos b \cos c}{\underbrace{\cos a}_{(1)'den \cos a = \cos b \cos c}}$$

$$\cos a = \cot B \cot C \quad \dots(12) \quad \text{bulunur.}$$

(1) ve (12) den $\cos a = \cos b \cos c = \cotg B \cotg C$
(2) ve (8) den $\sin b = \sin a \sin B = \tg c \cotg C$
(3) ve (9) dan $\sin c = \sin a \sin C = \tg b \cotg B$
(4) ve (6) dan $\cos B = \cos b \sin C = \cotg a \tg c$
(5) ve (7) den $\cos C = \cos c \sin B = \cotg a \tg b$

elde edilir. Bunları akılda tutmak güç olduğundan, daha kolay elde etme yöntemleri şöyle verilebilir :

A) Daire Kuralı :

Gidiş (ok yönünde) sırasına göre elemanlar :

1- açı 90° ise, örneğin $A=90^\circ$ için elemanların sırası,

$b, c, 90-B, 90-a, 90-C$

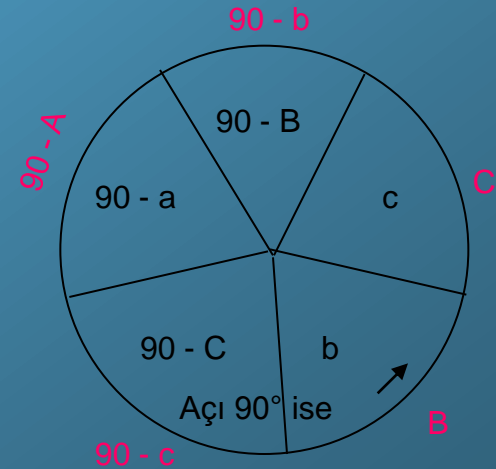
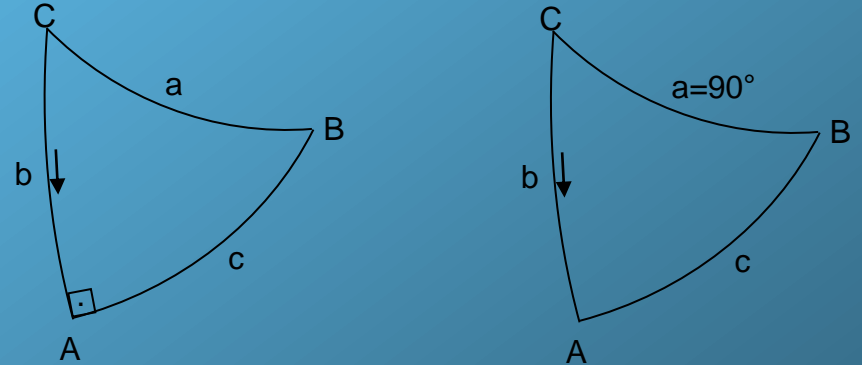
2- Kenar 90° ise, örneğin $a=90^\circ$ ise elemanların sırası,

$B, C, 90-b, 90-A, 90-c$

şeklindedir. Kural :

\sin (öğe) = karşı öğelerin \cos leri çarpımı
veya,

\sin (öğe) = komşu öğelerin \tg ları çarpımı



B) Beşgen (NEPER BEŞGENİ) Kuralı :

1- $\hat{A}=90^\circ$ ise, gidiş (ok yönünde) elemanların sırası,

90-b, 90-c, B, a, C

2- $a=90^\circ$ ise, gidiş (ok yönünde) elemanların sırası,

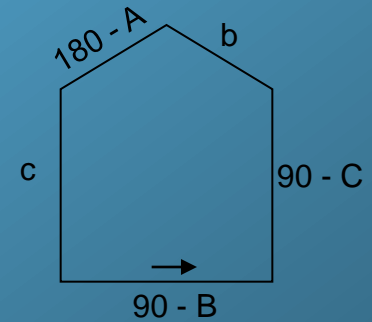
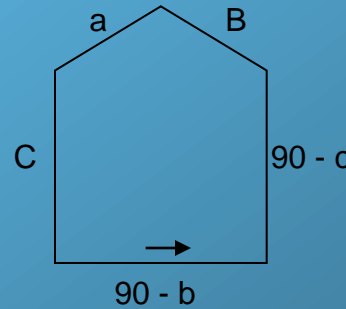
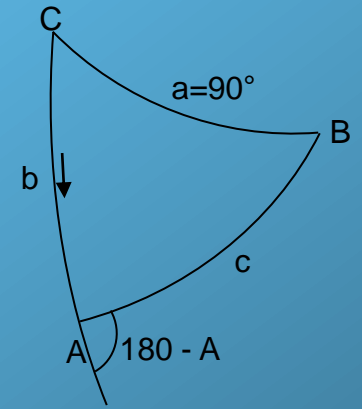
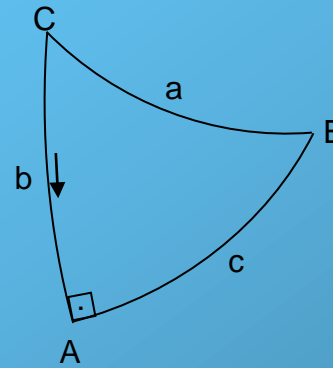
90-B, 90-C, b, 180-A, c

şeklindedir. Kural :

cos (öğe) = karşı öğelerin sin leri çarpımı

veya,

cos (öğe) = komşu öğelerin cotg ları çarpımı dır.



YARDIMCI (İkincil) FORMÜLLER :

Yukarıda verilen temel formüller, toplama ve çıkarma işlemlerini içermesinden dolayı hesaplamada (özellikle logaritmik işlem kullanılarak yapılacak hesaplamalarda) pek elverişli değildir. Bu nedenle, çarpma, bölme, kuvvet ve kök işlemlerini içeren ve temel formüllerden yararlanarak çıkarılan formüllere “Yardımcı veya ikincil formüller” denir. Bunlar şöyle sıralanabilirler :

1. BORDA FORMÜLLERİ

cos formüllerinden yararlanılır.

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

Şimdi $1 - \cos A$ ve $1 + \cos A$ yi oluştursak,

$$\begin{aligned} 1 - \cos A &= 1 - \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \\ &= \frac{\sin b \sin c - \cos a + \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \end{aligned}$$

$$\cos(b - c) = \sin b \sin c + \cos b \cos c \quad \text{oldugundan,}$$

$$1 - \cos A = \frac{\cos(b - c) - \cos a}{\sin b \sin c} \quad \dots(1)$$

$$\begin{aligned} 1 + \cos A &= 1 + \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \\ &= \frac{\sin b \sin c + \cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \end{aligned}$$

$$-\cos(b + c) = \sin b \sin c - \cos b \cos c \quad \text{oldugundan,}$$

$$1 + \cos A = \frac{-\cos(b + c) + \cos a}{\sin b \sin c} \quad \dots(2)$$

$$1 - \cos A = 2 \sin^2 \frac{A}{2} \text{ ve (1) den;}$$

$$2 \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{\overbrace{\cos(b-c)}^{\cos x} - \overbrace{\cos a}^{\cos y}}{\sin b \sin c} \text{ yazilabilir.}$$

$$1 + \cos A = 2 \cos^2 \frac{A}{2} \text{ ve (2) den;}$$

$$2 \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{\cos a - \cos(b+c)}{\sin b \sin c} \text{ yazilabilir.}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \text{ ozelliginden yararlanarak,}$$

bulunan bu ifadeler,

$$2 \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{-2 \sin \frac{b-c+a}{2} \sin \frac{b-c-a}{2}}{\sin b \sin c}$$

$$\left[\text{burada } \sin \frac{-(a+c-b)}{2} = \sin \frac{b-c-a}{2} \text{ yazilabilir} \right]$$

$$\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{\sin \frac{a+b-c}{2} \sin \frac{a+c-b}{2}}{\sin b \sin c} \text{ ve,}$$

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{\sin \frac{a+b+c}{2} \sin \frac{b+c-a}{2}}{\sin b \sin c} \text{ olur.}$$

$$a + b + c = 2u \text{ alinirsa,}$$

$$a + b - c = 2(u - c)$$

$$a + c - b = 2(u - b)$$

$$b + c - a = 2(u - a)$$

olur ki bunlar kullanilirsa,

$$\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{\sin \frac{2(u-c)}{2} \sin \frac{2(u-b)}{2}}{\sin b \sin c}$$

$$\sin \frac{A}{2} = \left[\frac{\sin(u-c) \sin(u-b)}{\sin b \sin c} \right]^{1/2}$$

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{\sin \frac{2u}{2} \sin \frac{2(u-a)}{2}}{\sin b \sin c}$$

$$\cos \frac{A}{2} = \left[\frac{\sin u \sin(u-a)}{\sin b \sin c} \right]^{1/2}$$

} ... (3)

(3) bağıntıları taraf tarafa oranlanırsa,

$$\tan \frac{A}{2} = \left[\frac{\sin(u-c)\sin(u-b)}{\sin u \sin(u-a)} \right]^{1/2} \dots(4)$$

(4)'un pay ve paydasi $\sin(u-a)$ ile carpilirsa,

$$\tan \frac{A}{2} = \left[\frac{\sin(u-a)\sin(u-b)\sin(u-c)}{\sin u} \right]^{1/2} \frac{1}{\sin(u-a)}$$

$$m = \left[\frac{\sin(u-a)\sin(u-b)\sin(u-c)}{\sin u} \right]^{1/2} \text{ ile gosterilirse,}$$

$$\tan \frac{A}{2} = \frac{m}{\sin(u-a)} \text{ ve benzer sekilde,}$$

$$\tan \frac{B}{2} = \frac{m}{\sin(u-b)}$$

$$\tan \frac{C}{2} = \frac{m}{\sin(u-c)}$$

} ... (5)

bulunur ki bu formüllere **BORDA** formülleri denir. Küresel üçgenin a, b, c elemanları verilip A, B, C elemanları istendiğinde kullanılır.

ABC küresel üçgeninin uçlaklar üçgeni A'B'C' küresel üçgeni ise,

$$a + A' = 180^\circ, A + a' = 180^\circ$$

$a = 180 - A'$, $b = 180 - B'$, $c = 180 - C'$ yazılabilir ve

$A = 180 - a'$, $B = 180 - b'$, $C = 180 - c'$ yazılabilir.

Diğer taraftan $a + b + c = 2u$ idi.

$$(180 - A') + (180 - B') + (180 - C') = 2u \quad , \quad \text{açılırsa}$$

$$2u = 540 - (A' + B' + C') \quad , \quad A' + B' + C' = 2U \text{ denirse,}$$

$$2u = 540 - 2U \rightarrow u = 270 - U \text{ elde edilir.}$$

$$(u - a) = 270 - U - (180 - A') = 90 - (U - A')$$

$(u - b) = 90 - (U - B')$, $(u - c) = 90 - (U - C')$ olur. Bu bağıntılar (5) te yerine konursa,

$$A = 180 - a' \Rightarrow \frac{A}{2} = 90 - \frac{a'}{2} \text{ olduğu dikkate alınarak,}$$

$$\tan \frac{A}{2} = \left[\frac{\sin(u - b) \sin(u - c)}{\sin u \sin(u - a)} \right]^{1/2}$$

$$\cot \frac{a'}{2} = \sqrt{\frac{[\cos(U - B') \cos(U - C')]}{-\cos U \cos(U - A')}}}$$

$$\cot \frac{a'}{2} = \left[\frac{\cos(U - B')\cos(U - C')}{-\cos U \cos(U - A')} \right]^{1/2}$$

$$\tan \frac{a'}{2} = \left[\frac{-\cos U \cos(U - A')}{\cos(U - B')\cos(U - C')} \right]^{1/2}$$

Bunun pay ve paydasi $\cos(U - A')$ ile carpilirsa,

$$\tan \frac{a'}{2} = \left[\frac{-\cos U}{\cos(U - B')\cos(U - C')\cos(U - A')} \right]^{1/2} \cos(U - A')$$

olur. Uclaklar ucgeni ozelliginden de,

$$\tan \frac{a}{2} = \left[\frac{-\cos U}{\cos(U - A)\cos(U - B)\cos(U - C)} \right]^{1/2} \cos(U - A)$$

yazilabilir.

$$n = \sqrt{\frac{-\cos U}{\cos(U - A)\cos(U - B)\cos(U - C)}} \quad \text{denirse,}$$

$$\tan \frac{a}{2} = n \cos(U - A) \quad \text{olur. Benzer sekilde,}$$

$$\tan \frac{b}{2} = n \cos(U - B)$$

$$\tan \frac{c}{2} = n \cos(U - C) \quad \text{yazilabilir.}$$

} ... (6)

Burada $A + B + C = 2U$ dur.

Bunlar da açılar için **BORDA** formülleridir. Açık elemanları verilip kenar elemanlar istendiğinde yararlanır.

2.GAUSS FORMÜLLERİ

$$\sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{c}{2} = \cos \frac{C}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{c}{2} = \sin \frac{C}{2} \cos \frac{a+b}{2}$$

$$\sin \frac{A-B}{2} \sin \frac{c}{2} = \cos \frac{C}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\cos \frac{A-B}{2} \sin \frac{c}{2} = \sin \frac{C}{2} \sin \frac{a+b}{2}$$

Bu formüllerde harfler arasında belli bir sıra ile değiştirme yapılarak, benzer şekilde sekiz tane formül daha bulunabilir. Bu formüllerin çıkarılışı “Kızılırmak, A., 1977, Gök bilim Dersleri, Cilt I, Küresel Gök bilim, Ege Üni. Matbaası, Bornova” kitabında ayrıntılı bir şekilde verilmektedir.

3. NEPER FORMÜLLERİ

Gauss formüllerinin taraf tarafa oranından elde edilirler :

$$\tan \frac{A+B}{2} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}} \cot \frac{C}{2}$$

$$\tan \frac{A-B}{2} = \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{a+b}{2}} \cot \frac{C}{2}$$

$$\tan \frac{a+b}{2} = \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{A+B}{2}} \tan \frac{c}{2}$$

$$\tan \frac{a-b}{2} = \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{A+B}{2}} \tan \frac{c}{2}$$

Küresel Üçgenin Alanı

Küresel üçgen düzlemsel üçgenden şu özellikleri ile farklıdır : Genellikle, düzlemsel üçgenin kenarları “uzunluk” olarak, küresel üçgenin kenarları ise “açı” olarak ölçülür. Ancak küresel üçgenin üzerinde bulunduğu kürenin yarıçapı bilinirse, kenarları “uzunluk” olarak hesaplanabilir. Düzlemsel üçgenin iç açılarının toplamı 180° iken küresel üçgenin iç açılarının toplamı 180° den büyüktür. Aradaki farka ilgili küresel üçgenin “Küresel artığı” denir. Yani verilen bir küresel üçgen için küresel artık ($=E$),

$$E = A+B+C - 180^\circ$$

ile tanımlanır. Küresel üçgenin üzerinde bulunduğu kürenin yarıçapı r ise, Küresel üçgenin S alanı,

$$S = \frac{\pi r^2 E}{180^\circ}$$

formulu ile bulunur.

Kenarlar verilmiş ise Alan için E ,

$$\tan \frac{E}{4} = \sqrt{\tan \frac{u}{2} \tan \frac{u-a}{2} \tan \frac{u-b}{2} \tan \frac{u-c}{2}}$$

ile bulunur.

Buna L'Huilier formülü denir. Burada $2u = a + b + c$ dir.