

Gözlenen cismin O noktasındaki merkezsel zeniti $Z'OC = z_m$ dir (yermerkezli yani geosantrik zenit uzaklığıdır).

Gözlenen cismin A ve O noktalarına göre doğrultu kayması ise

$$ACO = \pi'$$

dır. Burada zenit uzaklığı için düşey doğrultuya göre değil de, merkez doğrultusuna göre ölçülecek olan z' merkezsel zenit kullanılmıştır.

Çünkü bu zenit uzaklığı, formül çıkarılışında kolaylıklar sağlamaktadır.

Burada π' , gözlem yerinin r merkez uzaklığına ve z' zenit uzaklığına, yani cismin ufuktan olan yüksekliğine bağlıdır. Bu nedenle π' e “yükseklik paralaksı” denir. Eğer gözlem anındaki π' paralaksı bilinirse , ölçülen z' zenit uzaklığının Yer merkezine indirgenmiş değeri

$$z_m = z' - \pi' \quad \dots\dots(1)$$

olur (Dış açı, komşu olmayan açıların toplamına eşittir. Yani

$z' = z_m + \pi'$). Bu durumda sorun π' nin bilinmesinde ortaya çıkmaktadır. Bunun için zenit uzaklığına bağlı olmayan ve bilinen bir paralaksa gereksinim vardır. Zenit uzaklığına bağlı olmayan en uygun konum ufuk düzlemi üzerinde bulunan konumdur :

$$z' = 0^\circ \quad \text{için} \quad \pi' = 0^\circ \quad \text{“en küçük değer”}$$

$$z' = 90^\circ \quad \text{için} \quad \pi' = \pi_0 \quad \text{“en büyük değer”}$$

Buradaki π_o ' a "ufuk paralaksı" denir. Bu paralaks, yalnız gözlemcinin ve cismin Yer merkezinden olan uzaklığına bağlıdır ve

$$\sin \pi_o = \frac{r}{\Delta} \quad \dots(2)$$

değerindedir. Diğer taraftan OAC üçgeninden, sin teoremini uygulayarak,

$$\frac{r}{\Delta} = \frac{\sin \pi'}{\sin z'} \quad \dots(3)$$

yazılabilir. (2) ve (3) den,

$$\sin \pi' = \sin \pi_o \sin z' \quad \dots\dots(4)$$

elde edilir. (2) den görüleceği gibi A daki gözlemci için π_o ufuk paralaksı r ye bağlıdır. A nın coğrafi enlemi φ , bu gözlem noktasının h denizden yüksekliği bilinirse şöyle hesaplanabilir :

$$\tan \varphi' = (1 - f)^2 \tan \varphi$$

idi. Burada $f = 0.0033523$ Yer kürenin basıklığıdır.

Deniz düzeyi için görelî uzaklık ρ_o ,

$$\rho_o = \frac{r}{a} = \left(\cos^2 \varphi' + \frac{a^2}{b^2} \sin^2 \varphi' \right)^{-1/2}$$

ve Yer küre için $\frac{a^2}{b^2} = 1.0067396$ dir.

Denizden h yüksekliği için görelî uzaklık,

$$\rho = \frac{r}{a} = \rho_o + \frac{h}{a}$$

Ancak, herhangi bir gök cisminin herhangi bir ρ görelî uzaklığı için paralaksı yerine "a" ekvator yarıçapını gören paralaksı verilir. Buna ekvator-ufuk paralaksı denir ve

$$\sin \pi = \frac{a}{\Delta} \quad \dots(5)$$

olarak tanımlanır. (5) ve (2) den,

$$\sin \pi_o = \rho \sin \pi \quad \dots (6)$$

olur.

3. Adım :

Gözlem yerinin φ' enlemine göre göreceli merkez uzaklığı

$$\rho = \rho_o + \frac{h}{a} \quad , \quad \rho_o = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \varphi' + \frac{a^2}{b^2} \sin^2 \varphi'}}$$

hesaplanır.

4. Adım :

$$\sin \pi' = \underbrace{\rho \sin \pi \sin z'}_{\sin \pi_o} \quad \dots(8)$$

den π' yükseklik paralaksi bulunur.

5. Adım :

$z_m = z' - \pi'$ den Yer merkezli z_m zenit uzaklığı bulunur.

Yer kürenin basıklığından dolayı a azimutu da biraz etkilenir ama azimut değişimi boşlanabilecek kadar küçük olur.

Görüldüğü gibi (z, a) kon sayıları Yer merkezine (z_m, a_m) şeklinde indirgenir. Yer merkezli bütün kon sayılar π nin etkisinde olurlar. Ekvator kon sayıları da etkilenir. Şöyle ki,

C nin O merkezine göre yeri : Δ, α, δ

C nin A noktasına göre yeri : $\Delta', \alpha', \delta'$

A nin O merkezine göre yeri : r, φ'

Burada sorun, gözlemlerle bulunan $\Delta', \alpha', \delta'$ değerlerinden Yer merkezli kon sayılar Δ, α, δ nin hesaplanmasıdır.

O merkezli gök küresini ele alalım. A noktasından bakan gözlemci C cismini AC nin uzantısı olan D' noktasında,

O noktasından bakan gözlemci ise onu D noktasında görür.

Bu iki bakış doğrultusu gök küresi üzerinde $D(\alpha, \delta)$ ve $D'(\alpha', \delta')$

$D'(\alpha', \delta')$ noktalarını gösterir. Şekilden görüleceği gibi OZ' ve D'D yayı aynı OAC düzleminde dirler. O zaman küre üzerinde z' Yer merkezli zenite D'D den geçen büyük çemberin öğlen çemberini kestiği nokta bulunabilir.

- MA düşey doğrultunun uzantısı olan z zeniti de $PZ = 90 - \varphi$ ile bulunur.

- AZ ve AZ' nin ikisi öğlen çemberi üzerindedir. Aralarındaki açı ise $\varphi - \varphi'$ dür.
- OAC düzlemi öğlen çemberinde değildir, onunla a azimut açısını yapar.
- D' ve D noktalarının P uçlağından geçen saat çemberleri çizilirse, PD'D küresel üçgeni elde edilir. Buna sinüs teoremi uygulanırsa

$$\frac{\sin(s'-s)}{\sin \pi'} = \frac{\sin d}{\underbrace{\cos \delta}_{\sin(90-\delta)}}$$

Diğer taraftan $\sin \pi' = \sin \pi_0 \sin z'$ idi. O zaman,

$$\sin(s'-s) = \frac{\sin d}{\cos \delta} \sin \pi_0 \sin z'$$

yazılabilir. PD'Z' küresel üçgenine sinüs teoremi uygulanırsa,
 $PZ' = 90 - \varphi'$, $D'Z' = z'$ olduğundan,

$$\frac{\sin d}{\cos \varphi'} = \frac{\sin s'}{\sin z'}$$

$$\sin d = \frac{\sin s' \cos \varphi'}{\sin z'} \quad \text{bunu yerine koyarsak,}$$

$$\begin{aligned} \sin(s'-s) &= \sin \pi_o \cos \varphi' \sec \delta \sin s' \\ &= \sin \pi_o \cos \varphi' \sec \delta \underbrace{\sin(s + (s'-s))}_{s'} \end{aligned}$$

$$\{ \sin(s + (s'-s)) = \sin s \cos(s'-s) + \cos s \sin(s'-s) \} \quad \text{hatırlayarak}$$

$$\sin(s'-s) = \sin \pi_o \cos \varphi' \sec \delta [\sin s \cos(s'-s) + \cos s \sin(s'-s)]$$

$$\frac{\sin(s'-s)}{\cos(s'-s)} = \sin \pi_o \cos \varphi' \sec \delta \sin s + \sin \pi_o \cos \varphi' \sec \delta \cos s \tan(s'-s)$$

$$\tan(s'-s) - \sin \pi_o \cos \varphi' \sec \delta \cos s \tan(s'-s) = \sin \pi_o \cos \varphi' \sec \delta \sin s$$

$$\tan(s'-s) [1 - \sin \pi_o \cos \varphi' \sec \delta \cos s] = \sin \pi_o \cos \varphi' \sec \delta \sin s$$

ve,

$$\tan(s'-s) = \frac{\sin \pi_o \cos \varphi' \sec \delta \sin s}{1 - \sin \pi_o \cos \varphi' \sec \delta \cos s}$$

elde edilir.

Şekilden görüleceği gibi,

$s' - s = \alpha - \alpha'$ *O zaman,*

$$\tan(\alpha - \alpha') = \frac{\sin \pi_o \cos \varphi' \sec \delta \sin s}{1 - \sin \pi_o \cos \varphi' \sec \delta \cos s} \quad \dots(9)$$

olur. PD'Z' kuresel ucgenine cos teoremi uygulanir ve ara hesaplar yapilirsa,

$$\tan(\delta - \delta') = \frac{(\sin \pi_o \sin \varphi' \cos ec \gamma) \sin(\gamma - \delta)}{1 - (\sin \pi_o \sin \varphi' \cos ec \gamma) \cos(\gamma - \delta)} \quad \dots(10)$$

bulunur. Burada,

$$\tan \gamma = \frac{\tan \varphi' \cos \frac{\alpha - \alpha'}{2}}{\cos \left(s + \frac{\alpha - \alpha'}{2} \right)} \quad \dots(11)$$

dir. Δ' topografik uzaklik tan Δ Yer merkezli uzaklıza gecmek icin AOC ucgenine sin teoremi uygulanirsa,

$$\frac{r}{\sin \pi'} = \frac{\Delta'}{\sin z_m} \Rightarrow \Delta' = \frac{r \sin z_m}{\sin \pi'}$$

$$\frac{r}{\sin \pi'} = \frac{\Delta}{\sin(180 - z')} = \frac{\Delta}{\sin z'} \Rightarrow \Delta = \frac{r \sin z'}{\sin \pi'}$$

Buradan,

$$\Delta - \Delta' = \frac{r}{\sin \pi'} (\sin z' - \sin z_m) \quad \dots(12)$$

Hesaplamalarda (9) ve (10) no'lu denklemlerde zorluklar vardır. Bu nedenle seriye açarak bulunan aşağıdaki yaklaşık denklemler kullanılır :

$$\alpha - \alpha' = \frac{r}{\Delta} \frac{\cos \varphi' \sin s}{\cos \delta} \quad \dots(13)$$

$$\delta - \delta' = \frac{r}{\Delta} (-\sin \delta \cos \varphi' \cos s + \cos \delta \sin \varphi') \quad \dots(14)$$

olur. Burada r ve Δ nin birimleri aynı olmalıdır. Eğer r için a birimindeki değeri ρ , ve Δ için A.B. Birimindeki değeri $u = \Delta / A$ alınırsa bu denklemler,

$$u \pi_{\alpha} = 0^{\text{s}}.587 \rho \cos \varphi' \sin s \sec \delta \quad \dots(15)$$

$$u \pi_{\delta} = 8'' .80 \rho \sin \varphi' \cos \delta - 8'' .80 \rho \cos \varphi' \cos s \sin \delta \quad \dots(16)$$

şeklinde olurlar. Burada

$$1A = a / \sin \pi_{\circ}, \sin \pi_{\circ} = 8'' .80 \sin 1'' , (\alpha - \alpha')^{\text{s}} = \pi_{\alpha}, (\delta - \delta')'' = \pi_{\delta}$$

dir. Özel olarak $u \pi_{\alpha}$ ve $u \pi_{\delta}$ niceliklerine “Günlük paralaks çarpanları” denir. Denklemlerin sağ yanları $u = 1$ A.B uzaklığa karşılık gelen π_{α} , π_{δ} kaymalarını verir. Bu yüzden u uzaklığı için bu değerler u ya bölünmelidir.

1. c) Işık sapıncı (Aberasyon) :

Işık hızı sonlu bir değere sahiptir. Gözlenen cisimler ile gözlemci birbirlerine göre hareket halindedirler. Bu nedenle onların görünürdeki doğrultuları gerçekte biraz kaymış olur. Bu kaymaya ışık sapıncı (aberrasyon) denir. Tıpkı yağmur altında koşan birinin, yağmur doğrultusunu hareketinden dolayı farklı gözlemesinde olduğu gibi. Sapma miktarı, hem yağmurun ve hem de koşan kimsenin hızlarına bağlıdır. Yani sapıncı, iki cismin birbirlerine göre olan hareketinden kaynaklanır.

Gök cisimlerinin belli zamanlarındaki yerleri saptanırken gözlemler benzer bir olayın etkisinde kalır. Yani gök cisminden gelen ışığın yolu Yer'in yörüngesi üzerindeki hareketinden dolayı biraz sapar. Bu doğrultu kayması gök cisminin (örneğin yıldızın) gerçekteki konumunun saptanmasını etkiler. Işık hızı $c = 300\ 000\ \text{km} / \text{s}$ değeri ile sınırlıdır.

Herhangi bir anda Güneş'in gök küresi üzerindeki yerini saptamak istersek ;

- Yer, yörüngesi üzerinde ortalama $V = 30$ km/s lik hızla ilerler,
- Işık, Güneş'ten bize $\sim 8^{\text{dk}}$ da varır ($\Delta t = 498.38$ saniye),

Yani şu an bize Güneş'ten gelen ışık, Güneş'ten $\Delta t = 498.38$ önce çıkmış. Bu süre içinde Yer

$$\Delta s = 498.38 \times 30 \text{ km/s} = 14940 \text{ km}$$

geride bulunmaktaydı. Yani ışık $c \Delta t$ lik bir yol alırken, gözlemci $V \Delta t$ kadar ilerlemiş oluyor.

Bundan dolayı gözlenen doğrultu gerçek doğrultuya göre $\Delta\theta$ kadar sapar. Bu açığı hesaplayacak olursak,

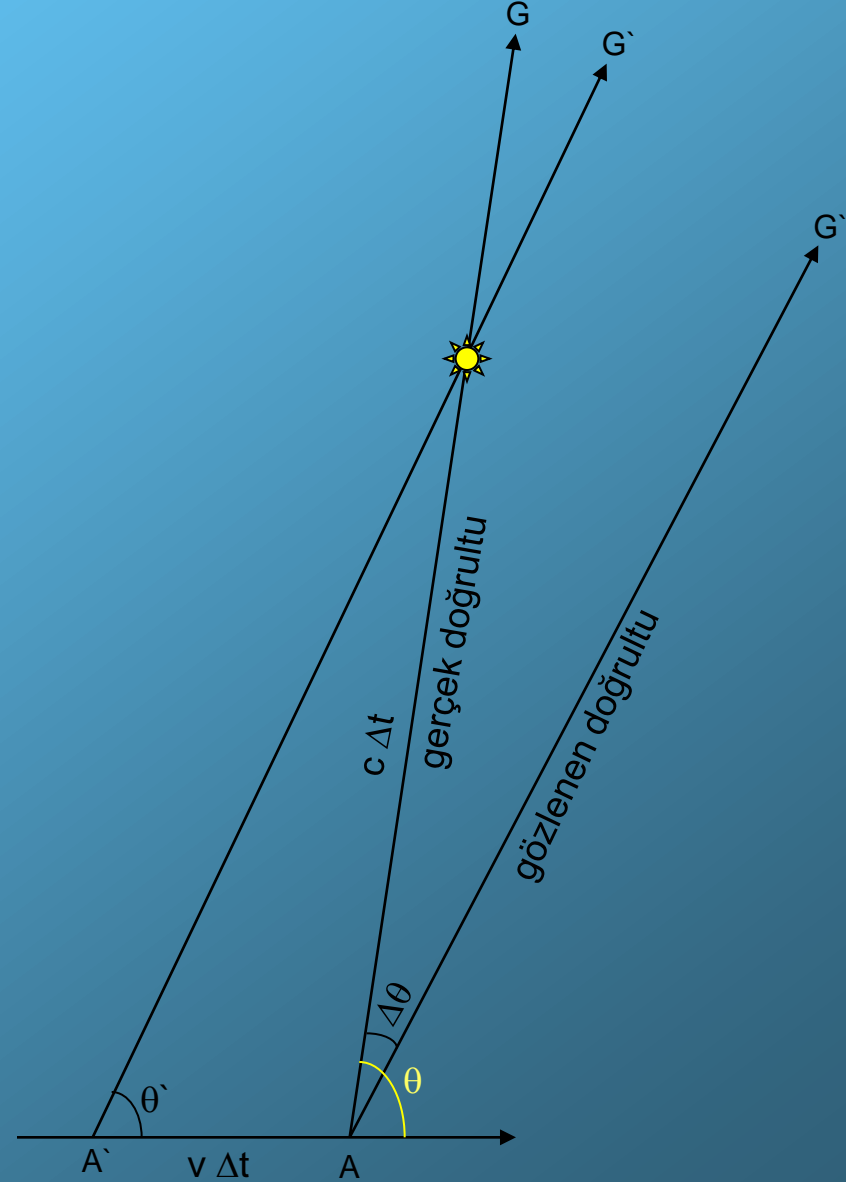
- t anında A dan Güneş'i θ açısındaki AG doğrultusunda görmekteyiz.

- Güneş'ten gelen ışık $t_i = t - \Delta t$ zamanında Güneş'ten çıkmıştır.

- Bu arada Yer, yani $t_i = t - \Delta t$ zamanında A' de idi.

$AA' = V \Delta t$, o zaman A' den gözlenen doğrultu θ' ise $\Delta\theta$ sapıncı,

$\Delta\theta = \theta - \theta'$, ve üçgende sinüs teoreminden,



$$\frac{\sin \Delta\theta}{V\Delta t} = \frac{\sin \theta'}{c\Delta t} \quad ; \quad \theta' = \theta - \Delta\theta \text{ olduğundan,}$$

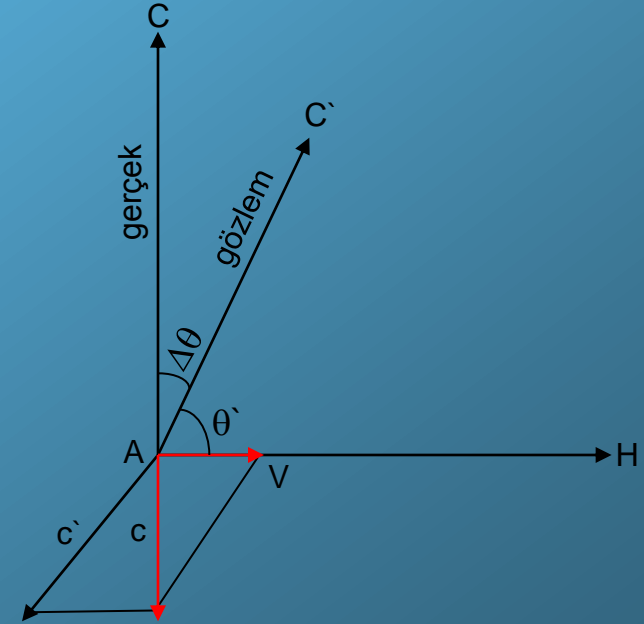
$$\sin \Delta\theta = \frac{V}{c} \sin(\theta - \Delta\theta) \quad \dots(1)$$

olur.

(1) Den görüleceği gibi bu sapınç, cismin uzaklığına bağlı değildir. Yalnız V/c oranı ile θ doğrultusuna bağlıdır. Bu sapınç bütün gök cisimleri için geçerlidir. Bu nedenle buna “**Yıldız sapıncı**” da denir.

Eğer gezegenler gibi yakın cisimler söz konusu ise, bunların kendi hızlarından kaynaklanan sapınçta söz konusu olur. Bu nedenle bu sapınca “**gezegen sapıncı**” denir. Çizimle bu sapınç doğrultuları vektörel bileşenlere ayrılır.

$\Delta\theta$ sapıncı V/c görelî hızına bağlıdır. Yer’in ortalama yörünge hızı alınırsa $V/c \sim 0.0001$ gibi sabit bir değer bulunur. Buna **sapınç (aberrasyon) sabiti** denir. Bu sabit küçük olduğundan, $\Delta\theta$ da çok küçük olur. O zaman $\Delta\theta$ nın (1) ifadesi seriye açılabilir :



$$\Delta\theta = a \sin \theta - \frac{1}{2} a^2 \sin 2\theta + a^3 \left(\sin \theta \cos^3 \theta - \frac{1}{3} \sin^3 \theta \right) \quad \dots(2)$$

Burada $a = V / c \cong 0.0001 \text{ rad} = 20''.47$ (= sapınc sabiti)

$a^2 = 0''.002$ ve $a^3 = 0''.2 \times 10^{-6}$ dir.

Ucuncu terim çok küçük olduğundan boslanabilir.

O zaman, sapınc düzeltmesi için,

$$\Delta\theta = a \sin \theta - \frac{1}{2} a^2 \sin 2\theta \quad \dots(3)$$

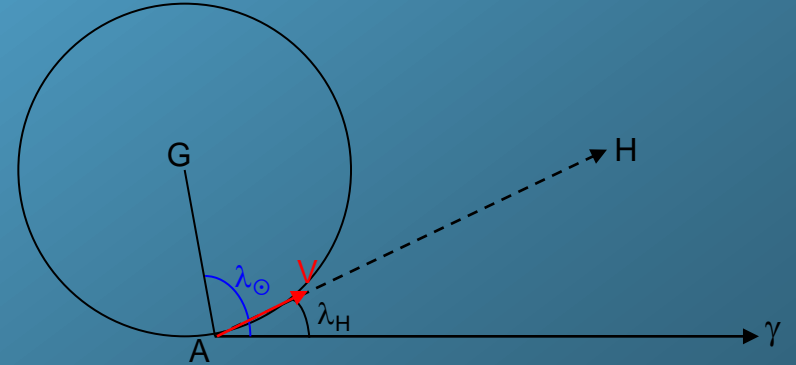
yaklaşımı yeterli olur.

Güneş, Ay ve gezegenlerin yılın ardışık günleri için gök küresindeki konumları tayin edilirken sapınc düzeltmesi yapılır. Bu işlem için (3) denklemi doğrudan kullanılamaz. Bunun yerine, sapıncan kaynaklanan konsayılarıdaki gereken düzeltmeler bulunmalıdır. Şimdi bunlara bakalım :

- Yer'in V hız vektörü AH doğrultusunda ve boylam başlangıcı olan γ noktasının A ya göre yeri $A\gamma$ doğrultusundadır. O zaman,

Güneşin tutulum boylamı $\lambda_{\odot} = GA\gamma$

H hedef tutulum boylamı $\lambda_H = HA\gamma$ olur. $GAH = 90^\circ$ olduğundan,



$$\lambda_H = \lambda_\odot - 90^\circ \quad \dots(4)$$

yazılabilir. λ_H nin yıl boyunca değişimi $0^\circ < \lambda_H < 360^\circ$ aralığındadır.

λ_H dan dolayı θ açısı ve dolayısıyla $\Delta\theta$ sapıncı her bir gök cismi için yıl boyunca değişir. İşte Yer'in yörünge hareketinden ileri gelen bu olaya "Yıllık sapıncı" denir. Benzer şekilde,

Yer'in kendi eksenini etrafında dönmesinden kaynaklanan günlük sapıncı = $0''.318$

Güneş'in uzay hareketinden ($V_\odot = 20$ km/s) kaynaklanan yüzyıllık sapıncı = $13''.75$

dir.

Sapıncın konsayılara olan etkisi :

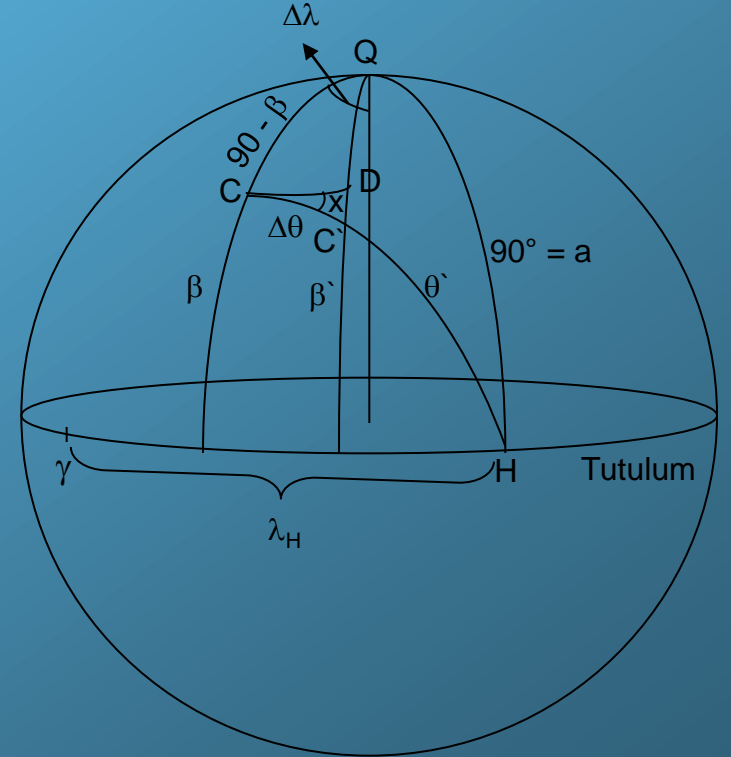
Şekilden görüleceği gibi,

C nin tutulum kon sayıları (λ, β)

C' nin tutulum kon sayıları $(\lambda + \Delta\lambda), (\beta + \Delta\beta)$

H hedefinin tutulum kon sayıları $(\lambda_\odot - 90^\circ), 0^\circ$

dir.



AC, AC' ve AH doğrultularının gök küresini deldiği noktalara göre ; $\Delta\lambda$ nin küçük olduğunu dikkate alarak,

$$CD = \Delta\lambda \cos \beta \quad , \quad DC' = -\Delta\beta \quad \text{ve,}$$

$$CD = \Delta\theta \cos x \quad , \quad DC' = \Delta\theta \sin x \quad \text{oldugundan,}$$

$$\Delta\lambda \cos \beta = \Delta\theta \cos x$$

...(5)

$$-\Delta\beta = \Delta\theta \sin x$$

olur. Burada x için QCH ucgeninden,

$$CQH = \lambda_H - \lambda = \lambda_{\odot} - 90^{\circ} - \lambda$$

$$QCH \cong 90^{\circ} + x \quad , \quad CH = \Delta\theta + \theta' = \theta$$

olduguna gore,

$$\frac{\sin(\lambda_{\odot} - 90^{\circ} - \lambda)}{\sin \theta} = \frac{\sin(90^{\circ} + x)}{\sin 90^{\circ}} \quad \text{ve,}$$

$$\sin([\lambda_{\odot} - \lambda] - 90^{\circ}) = -\cos(\lambda_{\odot} - \lambda) \quad \text{ile,}$$

$$\sin \theta \cos x = -\cos(\lambda_{\odot} - \lambda) \quad \text{...(6)}$$

$a = 90^\circ$, $b = \theta$, $c = 90 - \beta$, $A = 90 + x$ ve $B = \lambda_\odot - 90^\circ - \lambda$ olan bir ABC kuresel ucgenine $\sin(\text{kenar})\cos(\text{açı})$ formulu uygulanırsa,

$$\sin b \cos A = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B \quad \text{idi,}$$

$$\sin \theta \cos(90 + x) = \cos 90^\circ \sin(90 - \beta) - \sin 90^\circ \cos(90 - \beta) \cos(\lambda_\odot - 90^\circ - \lambda)$$

$$\sin \theta \sin x = -\sin \beta(-\sin(\lambda_\odot - \lambda))$$

$$\sin \theta \sin x = \sin \beta \sin(\lambda_\odot - \lambda) \quad \dots(7)$$

bulunur. Sapınc için $\Delta\theta = a \sin \theta$ yaklasik degeri alınırsa,

(5), (6) ve (7) den su sonuclar elde edilir :

$$\Delta\lambda = -a \cos(\lambda_\odot - \lambda) \sec \beta$$

$$\dots(8)$$

$$\Delta\beta = -a \sin(\lambda_\odot - \lambda) \sin \beta$$

Burada $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ ve $\Delta\beta = \beta' - \beta$ dir.

(8) denklemleri, sapıncin kon sayılara olan etkilerini veren temel denklemlerdir.

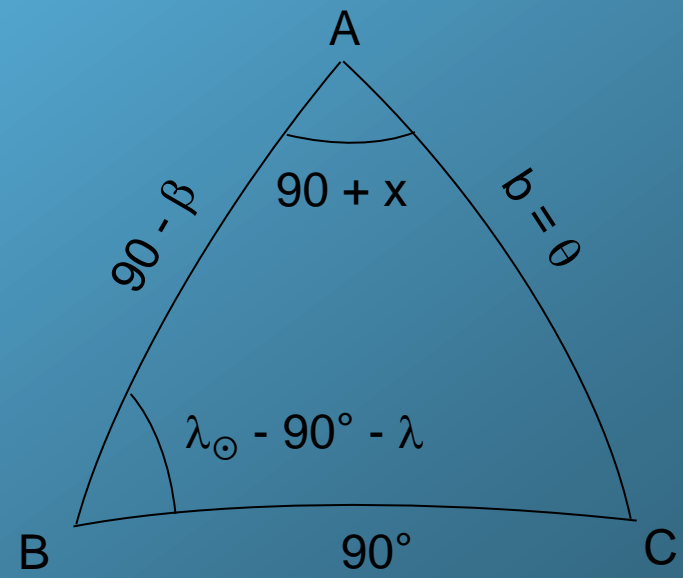
Bu degisimler tutulum – ekvator donusumune uygulanırsa,

$$\Delta\alpha = -a \sec \delta (\cos \alpha \cos \lambda_\odot \cos \varepsilon + \sin \alpha \sin \lambda_\odot)$$

$$\dots(9)$$

$$\Delta\delta = -a \cos \lambda_\odot (\sin \varepsilon \cos \delta - \cos \varepsilon \sin \alpha \sin \delta) - a \cos \alpha \sin \delta \sin \lambda_\odot$$

elde edilir.



Burada cismin gerçek yeri $C(\alpha, \delta)$, gözlenen yeri ise $C'(\alpha', \delta')$ olmak üzere,

$$\alpha = \alpha' - \Delta\alpha \quad \text{ve} \quad \delta = \delta' - \Delta\delta$$

olacaktır.

Bir gezegenin kütlesi = m

Uzaklığı = d

Yörüngesindeki açısal hızı = n

Boylamı $\lambda = 0$ alınır, bu gezegen için dinamik olarak (9) denklemleri bulunabilir ancak, a yerine gezegen için,

$$\frac{n'' md}{c} = k' md \frac{n}{n(\text{Yer})}$$

gibi sabit bir çarpan söz konusu olur. Bu çarpan, her bir gezegen için belirli bir değere sahiptir. Örneğin, Çoban ve Yer için 0".0001 değerinde olurken Satürn için 0".0019 ve Jüpiter için 0".0086 değerindedir.

1. d) Gün merkezli (Yıllık) Paralaks :

Yıldızların gözlenen doğrultuları gökyüzünde küçük elipsler çizer. Bu elipslerin dönemi 1 yıldır. Çapları açı saniyesinin kesri mertebesindedir. Yer merkezinden Güneş'e doğru çizilen doğrultuda ölçülebilir bir doğrultu sapması kaydedilebilir. Bu paralaktik açı,

a) Gözlenen doğrultunun Güneş merkezine indirgenmesi, ve

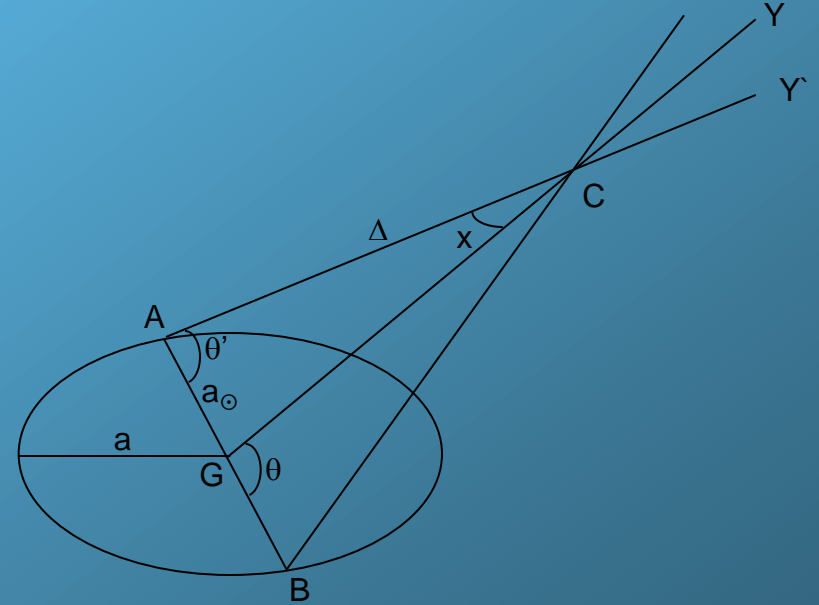
b) Gök cisminin uzaklığının bulunması bakımından önemlidir.

Uzaklığı Δ olan bir C yıldızı olsun. Yer, herhangi bir gün için A da olsun. Gözlemci bu anda yıldızı Y' doğrultusunda görecektir. Güneş merkezinden bakmış olsaydı Y doğrultusunda görecekti. Bu doğrultuların AG ye göre yaptıkları açılar θ' ve θ olsun. O zaman, x sapması

$$x = \theta - \theta' \dots\dots (1)$$

olur. Bu x doğrultu sapması Δ uzaklığına ve Yer'in yörüngedeki A noktasına yani gözlem tarihine bağlıdır.

x bir yıl boyunca sürekli değişir. Bu nedenle bir kenarı Δ ve $\theta = 90^\circ$ olan sanal üçgenin tepe açısı "paralaks" olarak tanımlanır ve π ile gösterilir.



Gözlemci A da iken Yer – Güneş uzaklığı a_{\odot} olsun. AGC üçgenine sinüs teoremi uygulanırsa,

$$\sin x = \frac{a_{\odot}}{\Delta} \sin \theta \quad \dots(2)$$

elde edilir. Burada $\frac{a_{\odot}}{\Delta}$ oranı çok küçüktür:

En yakın yıldız α CMa için,

$$\frac{a_{\odot}}{\Delta} = \frac{0.375}{206265} = 1.8 \times 10^{-6} \text{ dir. Dolayısıyla}$$

$\sin x = x(\text{rad})$ alınabilir. $a_{\odot} = a$ (ortalama Yer – Güneş uzaklığı: 1 A.B) olmak üzere,

$$x(\text{rad}) = \frac{a}{\Delta} \sin \theta \quad \dots(3)$$

yazılabilir. Burada $\theta = 90^{\circ}$ için x 'in aldığı değer $\pi(\text{rad})$, "Gün merkezli paralaks" veya "yillik paralaks" olur.

$$\text{Yillik paralaks} = \pi(\text{rad}) = \frac{a}{\Delta} \quad \dots(4)$$

Acı saniyesi biri min deki değeri ise,

$$\pi'' = 206265'' \frac{a}{\Delta} \quad \dots(5)$$

1 pc tanımı buradan gelir. 1 pc, yıllık paralaksı $\pi = 1''$ olan uzaklıktır. O zaman,

$$1 \text{ pc} = 206265 \times 149.6 \times 10^6 \text{ km} = 3.0857244 \times 10^{13} \text{ km}$$

Işık yılı (iy) ise,

$$\begin{aligned} 1 \text{ iy} &= c \times 1 \text{ yıl} = 299792.5 \text{ km/s} \times 31556925^{\text{s}}.9747 \\ &= 9.46 \times 10^{12} \text{ km} \end{aligned}$$

ve buradan, 1 pc = 3.261682 iy olduğu görülür.

$206265 \times a = 1 \text{ pc}$ ve $\Delta / 1 \text{ pc} = r$ alınırsa,

$$\pi'' = 1 / r(\text{pc}) \quad \dots(6)$$

şeklinde basit bir bağıntı bulunur. Yani, paralaksın açı saniyesi birimindeki değeri, uzaklığın pc birimindeki değerinin tersine eşittir. (3) ve (4) den,

$$x = \pi \sin \theta \quad \dots(7)$$

bulunur. Her ne kadar bu bağıntı basit gibi görünüyorsa da, ne x ve ne de π doğrudan ölçülemediği ve θ da ölçülemediği için pratikte pek uygun bir bağıntı değildir. Ayrıca θ' de ölçülebilir görünse de geceleyin Güneş doğrultusu gözlenemediği için bu θ' açısı da ölçülemez. Yani (7) denklemini pratikte uygun olan bir bağıntı değildir.

$$\pi \sin \theta \cos \psi = (-\Delta\lambda) \cos \beta$$

...(8)

$$\pi \sin \theta \sin \psi = \Delta\beta$$

olur. Diğer taraf tan $Q\hat{Y}G$ dik kenarlı üçgende,

$$\frac{\sin \theta}{\sin(\lambda_{\odot} - \lambda)} = \frac{\sin 90^\circ}{\sin(90^\circ + \psi)}$$

$$\sin \theta \cos \psi = \sin(\lambda_{\odot} - \lambda)$$

Yine $Q\hat{Y}G$ üçgeninde,

$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$ teoremi uygulamırsa,

$$\sin \theta \cos(90 + \psi) = \underbrace{\cos 90}_0 \sin(90 - \beta) - \sin 90^\circ \cos(90 - \beta) \cos(\lambda_{\odot} - \lambda)$$

$$\sin \theta \cos(90 + \psi) = -\sin \beta \cos(\lambda_{\odot} - \lambda)$$

$$-\sin \theta \sin \psi = -\sin \beta \cos(\lambda_{\odot} - \lambda)$$

$$\sin \theta \sin \psi = \sin \beta \cos(\lambda_{\odot} - \lambda) \quad \text{bulunur.}$$

Bulunan $\cos \psi$ ve $\sin \psi$ değerleri (8) de konur ve

$(\lambda_{\odot} - \lambda)$ yerine $-(\lambda - \lambda_{\odot})$ alınırsa,

$$\Delta\lambda = \pi \sin(\lambda - \lambda_{\odot}) \sec \beta$$

...(9)

$$\Delta\beta = \pi \cos(\lambda - \lambda_{\odot}) \sin \beta$$

elde edilir. Böylece bu (9) denklemleri ile tutulum katsayılarının Yer merkezinden gün merkezine indirgeme veya bu işlemin tersi olan indirgeme hesabı yapılabilir. Söyleki;

1-) Belli bir tarih için λ_0 ya hesaplanır veya yılıktan alınır,

2-) Eğer bir yıldızın (λ', β') konsayıları gözlemle bulunmuşsa, bu değerler (9) denklemlerindeki (λ, β) yerine konularak $\Delta\lambda, \Delta\beta$ hesaplanır ve böylece,

$$\Delta\lambda + \lambda' = \lambda$$

$$\Delta\beta + \beta' = \beta$$

İle (λ, β) değerleri bulunabilir.

(9) denklemleri paralaktik hareketi gösterirler. (9) denklemlerinde λ_0 yok edilirse,

$$(\Delta\lambda \cos \beta)^2 = \pi^2 \sin^2(\lambda - \lambda_0)$$

$$(\Delta\beta)^2 = \pi^2 \sin^2 \beta \cos^2(\lambda - \lambda_0)$$

$$\frac{(\Delta\lambda \cos \beta)^2}{\pi^2} = \sin^2(\lambda - \lambda_0)$$

$$\frac{(\Delta\beta)^2}{\pi^2 \sin^2 \beta} = \cos^2(\lambda - \lambda_0)$$

+ +

$$\frac{(\Delta\lambda \cos \beta)^2}{\pi^2} + \frac{(\Delta\beta)^2}{\pi^2 \sin^2 \beta} = 1 \quad \dots(10)$$

elips denklemi bulunur. Bu elip sin gok kuresi uzerinde belirttigi kapali egriye "paralaks elipsi" denir. Bu elip sin yari-buyuk ekseni π , yari-kucuk ekseni de $\pi \sin \beta$ buyuklugundedir.

Yalnız, eğer $\beta = 0$ ise bu denklem geçerli olmaz. Bu durumda (9) ifadelerinin sadece birincisi kullanılabilir. Bu denklem de

$$\Delta\lambda = \pi \sin(\lambda - \lambda_0)$$

şeklinde kısalır. Burada λ_0 değişkendir. Denklem de bir doğru denklemdir.

Paralaksın (α , δ) konsayıları üzerindeki etkisi :

Gözlenen kon sayılar : $Y' (\alpha' , \delta')$

İstenen kon sayılar : $Y (\alpha , \delta)$ ise,

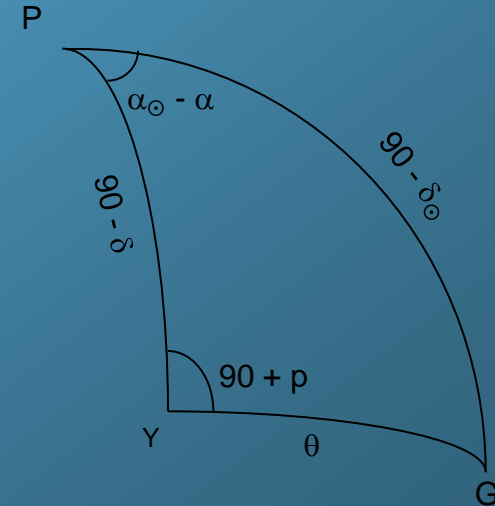
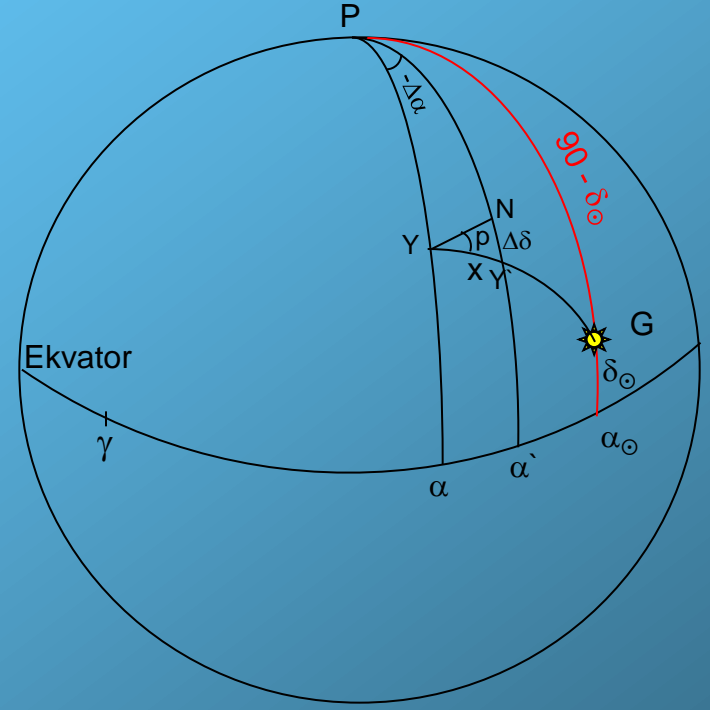
$$\left. \begin{aligned} \Delta\alpha &= \alpha - \alpha' \\ \Delta\delta &= \delta - \delta' \end{aligned} \right\} \dots(11)$$

Gözlem anında Güneş $G(\alpha_0 , \delta_0)$ 'de olsun.

Y den ekvatora çizilen paralel çemberin oluşturduğu YNY' üçgeni dikkate alınır ve

$$x = \pi \sin \theta$$

değeri kullanılırsa,



$$x \cos p = (-\Delta\alpha) \sin(90 - \delta)$$

$$x \sin p = \Delta\delta$$

dan,

$$\pi \sin \theta \cos p = (-\Delta\alpha) \cos \delta$$

$$\pi \sin \theta \sin p = \Delta\delta$$

elde edilir. PYG ucgeninde,

$$PYG = 90 + p, \quad PG = 90 - \delta_{\odot}, \quad YG = \theta \quad \text{olup}$$

sin teoremin den,

$$\frac{\sin \theta}{\sin(\alpha_{\odot} - \alpha)} = \frac{\sin(90 - \delta_{\odot})}{\sin(90 + p)}$$

$$\sin \theta \sin(90 + p) = \cos \delta_{\odot} \sin(\alpha_{\odot} - \alpha)$$

$$\sin \theta \cos p = \cos \delta_{\odot} \sin(\alpha_{\odot} - \alpha)$$

sin-cos teoremin den,

$$\sin \theta \cos(90 + p) = \cos(90 - \delta_{\odot}) \sin(90 - \delta) - \sin(90 - \delta_{\odot}) \cos(90 - \delta) \cos(\alpha_{\odot} - \alpha)$$

$$-\sin \theta \sin p = \sin \delta_{\odot} \cos \delta - \cos \delta_{\odot} \sin \delta \cos(\alpha_{\odot} - \alpha)$$

Bu iki ifadeden $\sin p$ ve $\cos p$ nin degerleri yukaridaki

ifadelerde yerlerine konursa,

$$\Delta\alpha \cos \delta = \pi \cos \delta_{\odot} \sin(\alpha - \alpha_{\odot}) = \pi P_{\alpha}$$

...(12)

$$\Delta\delta = \pi [-\sin \delta_{\odot} \cos \delta + \cos \delta_{\odot} \sin \delta \cos(\alpha - \alpha_{\odot})] = \pi P_{\delta}$$

sonucu bulunur. Burada $(\alpha_{\odot} - \alpha)$ yerine $-(\alpha - \alpha_{\odot})$

alinmistir. P_{α} ve P_{δ} lara "yillik paralaks carpanlari"

denir. Bu carpanlarin, bir yildiz icin istenen tarihteki

degerleri (12) denklemlerinden hesaplanabilirler.

Bu denklemler aynı zamanda paralaks tayininde de kullanılır. Bu amaçla ilk denklemin kullanımı çözüm için yeterlidir. πP_α niceliği teleskopla çekilen fotoğraf plağı üzerindeki sapmanın Δx bileşenini, πP_δ de Δy bileşenini verecektir. Çeşitli zamanlarda çekilen plaklar üzerinde ölçülen Δx sapmalarında πP_α nın etkisi de vardır. Bu etkinin matematiksel ifadesi

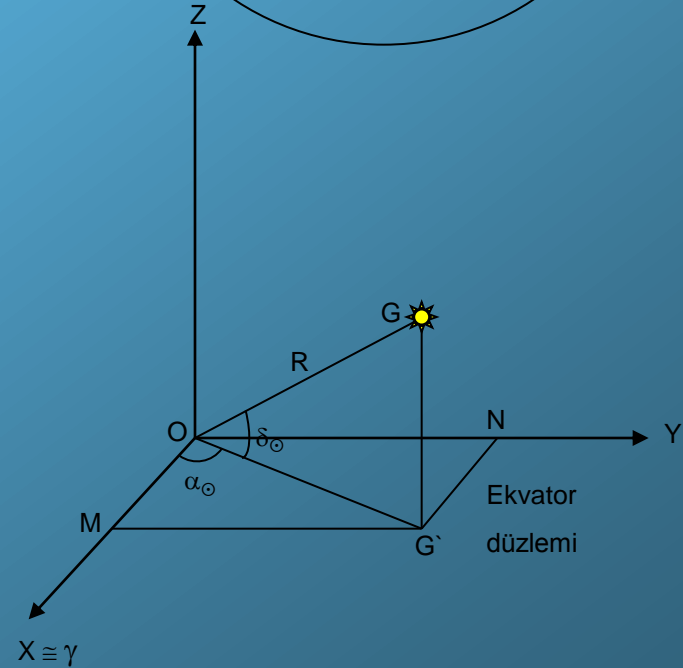
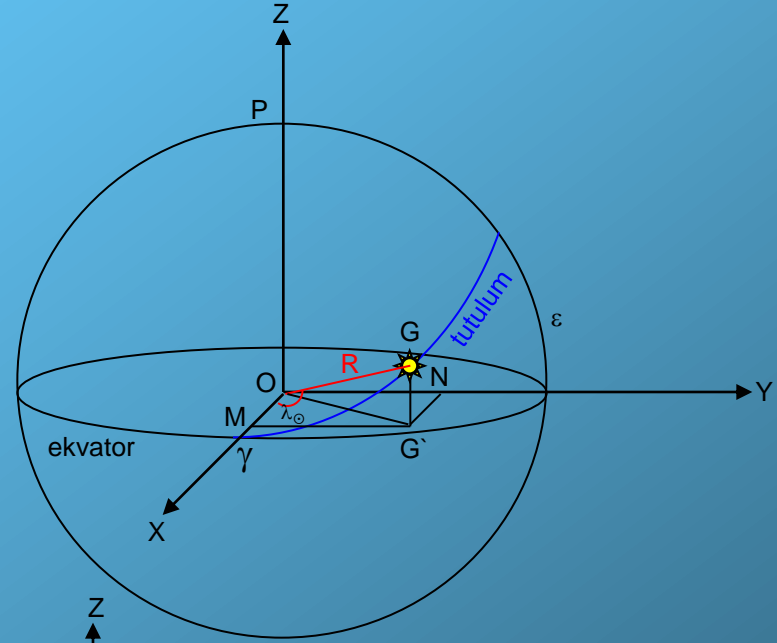
$$\Delta x = C_x + \mu_x t + \pi P_\alpha$$

dir. t_i ye karşı Δx_i ler ölçülür ve en küçük kareler yöntemiyle C_x , μ_x ve π bilinmeyenleri bulunur. Bu şekilde bulunan π ye "trigonometrik paralaks" denir. Bu yöntem dolaysız yöntem olup yakın yıldızlar için çok iyi ve kullanışlı yöntemdir.

(12) denklemlerinin kullanımına ilişkin bir örnek :

Güneş'in X_0 , Y_0 , Z_0 dik kon sayılarını, tutulum ve ekvator kon sayılarına göre ifade edersek

$$\text{OG} = R = a_0 / a \approx 1 \text{ (görelî Yer-Güneş uzaklığı)}$$



$$X_{\ominus} = \overline{MO} \quad , \quad Y_{\ominus} = \overline{ON} \quad , \quad Z_{\ominus} = \overline{GG'} \quad , \quad GM = R \sin \lambda_{\ominus}$$

Gunes'in tutulum enlemi $\beta \cong 0^{\circ}$ dir.

$$X_{\ominus} = \overline{OM} = R \cos \lambda_{\ominus} \quad \Rightarrow \quad X_{\ominus} / R = \cos \lambda_{\ominus}$$

$$Y_{\ominus} = \overline{ON} = R \sin \lambda_{\ominus} \cos \varepsilon \quad \Rightarrow \quad Y_{\ominus} / R = \sin \lambda_{\ominus} \cos \varepsilon$$

$$Z_{\ominus} = R \sin \lambda_{\ominus} \sin \varepsilon \quad \Rightarrow \quad Z_{\ominus} / R = \sin \lambda_{\ominus} \sin \varepsilon$$

Yine sekilden,

$$X_{\ominus} = R \cos \delta_{\ominus} \cos \alpha_{\ominus} \quad \Rightarrow \quad X_{\ominus} / R = \cos \delta_{\ominus} \cos \alpha_{\ominus}$$

$$Y_{\ominus} = R \cos \delta_{\ominus} \sin \alpha_{\ominus} \quad \Rightarrow \quad Y_{\ominus} / R = \cos \delta_{\ominus} \sin \alpha_{\ominus}$$

$$Z_{\ominus} = R \sin \delta_{\ominus} \quad \Rightarrow \quad Z_{\ominus} / R = \sin \delta_{\ominus}$$

Bu ifadelerden,

$$\cos \lambda_{\ominus} = \cos \delta_{\ominus} \cos \alpha_{\ominus}$$

$$\sin \lambda_{\ominus} \cos \varepsilon = \cos \delta_{\ominus} \sin \alpha_{\ominus} \quad \dots(13)$$

$$\sin \lambda_{\ominus} \sin \varepsilon = \sin \delta_{\ominus}$$

(12) denklemlerinde $\sin(\alpha - \alpha_0)$ ve $\cos(\alpha - \alpha_0)$ değerleri kullanarak ve (13) denklemlerinde $R = 1$ alarak iki tür denklem elde edilir. Biri paralaks çarpanlarını veren denklem takımıdır. Diğer tür ise, $X_0 = \cos \lambda_0$, $Y_0 = \sin \lambda_0$, $Z_0 = \sin \lambda_0 \sin \varepsilon$ olarak elde edilir.

Yıllık paralaks arpanları :

$$P_\alpha = X_\ominus \sin \alpha - Y_\ominus \cos \alpha \quad \dots(14)$$

$$P_\delta = X_\ominus \cos \alpha \sin \delta + Y_\ominus \sin \alpha \sin \delta - Z_\ominus \cos \delta$$

Burada (α, δ) , gözlenen yıldızın ekvator kon sayılarıdır. X_0 , Y_0 ve Z_0 değerleri almanaklarda her gün için verilir.

ÖZET :

-Bir yıldızın Yer merkezli (α', δ') ekvator kon sayıları gözlemle saptanır.

-Bu yıldızın π paralaksı herhangi bir yoldan bilinir (alınır veya hesaplanır)

-(14) ifadelerinde önce (α, δ) yerine (α', δ') olarak P_α ve P_δ arpanları hesaplanır

-Sonra (12) ifadelerine göre,

$$\Delta\alpha = \pi P_{\alpha} \sec \delta$$

$$\Delta\delta = \pi P_{\delta}$$

ile $\Delta\alpha$ ve $\Delta\delta$ hesaplanır

-En sonunda

$$\alpha = \alpha' + \Delta\alpha$$

$$\delta = \delta' + \Delta\delta$$

ile Gün merkezli kon sayılar bulunur.

2. a) PRESESYON :

Presesyon, ilkbahar ılıminın tutulum üzerinde batı yönde sürekli olarak ilerlemesidir. Bu nedenle buna “ekinoksların presesyonu” da denir.

İznik’li Hipokrat (M.Ö. 129), Batlamyus (M.S. 137) ve Uluğ Bey’in (M.S. 1437) katalogları ve daha sonraki yıldız katalogları incelenirse yıldızların konsayılarının değişimi ile ilgili iki önemli sonuç fark edilir :

- 1- Yıldızların tutulum enlemleri zamanla önemli bir değişim göstermezler ama,
- 2- Tutulum boylamları ise yılda $\sim 50''$ kadar artmaktadır.

Bunun olabilmesi için γ koç noktasının batı yönde hareket etmesi gerekir.