1 Aksiyomatik Sistemlerde İspat

$p \Longrightarrow q$ şeklindeki bir önerme doğru ise bu önermeye :Teorem adı verilir. $p \Longrightarrow q$ teoreminde p ye hipotez, q ya da hüküm adı verilir. Bu önermenin doğru olduğunu gösterme işleminede teoremin ispatı adı verilir. Karşımıza bazen $p \Leftrightarrow q$ halindeki önermeler çıkar. Bu tür önermelerin ispatı için

$$[p \Leftrightarrow q] \Leftrightarrow (p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p)$$

denkliğinden yararlanmak gerekir. Teoremlerin ispatı yapılırken aşağıda vereceğimiz beş yöntem kullanılır.

1.0.1 Doğruluk Tablosu Yardımıyla İspat Yöntemi

İspatlanması gereken bileşik önermenin hipotez ve hükmü arasındaki gerektirmenin bir totoloji olduğunu göstermek tablo yardımıyla ispat yöntemidir. Bazen de tablo yardımıyla bileşik önermenin çelişki olduğunu göstermek de bir ispat yöntemidir.

Örnek 1 *p, q, r birer önerme olmak üzere*

$$[(p \Longrightarrow q) \wedge (\sim r \Longrightarrow \sim q)] \Longrightarrow (\sim r \Longrightarrow \sim p)$$

önermesini ispatlayalım.

Çözüm 2 *Bu önermenin tablo yardımıyla bir totoloji olduğunu gösterelim.*

$H : (p \Longrightarrow q) \wedge (\sim r \Longrightarrow \sim q)$ ve $S : (\sim r \Longrightarrow \sim p)$ olmak üzere

p	q	r	$\sim p$	$\sim q$	$\sim r$	$p \Longrightarrow q$	$\sim r \Longrightarrow \sim q$	H	S	$H \Longrightarrow S$
D	D	D	Y	Y	Y	D	D	D	D	D
D	D	Y	Y	Y	D	D	Y	Y	Y	D
D	Y	D	Y	D	Y	Y	D	Y	D	D
D	Y	Y	Y	D	D	Y	D	Y	Y	D
Y	D	D	D	Y	Y	D	D	D	D	D
Y	D	Y	D	Y	D	D	Y	Y	D	D
Y	Y	D	D	D	Y	D	D	D	D	D
Y	Y	Y	D	D	D	D	D	D	D	D

elde edilir.

1.0.2 Doğrudan İspat Yöntemi

Bu ispat yönteminde $p \Longrightarrow q$ önermesindeki hipotez doğru kabul edilir ve bu bilgiler ışığında hükmün doğru olduğu gösterilir. Bileşik önermelerde ise yine hipotez doğru kabul edilip hüküm gösterilmeye çalışılır.

Örnek 3 *$\sim p \wedge \sim q$ ile $(q \vee r) \Longrightarrow p$ önermeleri doğru ise $\sim r$ önermeside doğrudur. Gösteriniz.*

Çözüm 4 *$[\sim p \wedge \sim q] \wedge [(q \vee r) \Longrightarrow p]$ doğru olsun. Bu durumda $\sim p \wedge \sim q$ ve $(q \vee r) \Longrightarrow p$ doğrudur. "ve" ile "değil" tanımlarından p, q yanlış ve $(q \vee r) \Longrightarrow p$ doğrudur. p yanlış olduğundan $(q \vee r)$ yanlıştır. O halde q ve $(q \vee r)$ yanlıştır. r yanlıştır. Sonuç olarak $\sim r$ doğrudur.*

1.0.3 Dolaylı İspat Yöntemi

Bu ispat yönteminin temelinin kontrapozitiflik diye bilinen

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q) \Rightarrow (\sim p)$$

kuralı oluşturur. Yani bu durumda hükmün yanlış olduğunu kabul edip hipotezinde yanlış olduğunu göstereceğiz.

Örnek 5 *a ve b iki doğal sayı olsun. "a ve b nin çarpımı bir tek doğal sayı ise a ve b tek sayıdır." önermesini ispatlayalım.*

Çözüm 6 *Hipotez p: a ve b doğal sayılarının çarpımı tek sayıdır.*
Sonuç q: a ve b tek sayıdır.
$(\sim p)$: a ve b doğal sayılarının çarpımı çift sayıdır.
$(\sim q)$: a veya b çift sayıdır.

1. a veya $b$çift sayıdır.

i $a = 2n$ veya $b = 2m$ olacak şekilde $m,\ n$ doğal sayıları vardır.
$a.b = 4nm$ bir çift sayıdır.

ii $a = 2n$ veya $b = 2m + 1$ olacak şekilde $m,\ n$ doğal sayıları vardır.
$a.b = 2n\,(2m + 1)$ bir çift sayıdır.

iii $a = 2n + 1$ veya $b = 2m$ olacak şekilde $m,\ n$ doğal sayıları vardır.
$a.b = 2m\,(2n + 1)$ bir çift sayıdır.

O halde $(\sim q) \Rightarrow (\sim p)$ gerçeklenir.

1.0.4 Olmayana Ergi Yöntemi

Bu yöntemde hipotezin doğru fakat hükmün (sonucun) teoremde ifade edildiği gibi doğru olmadığı varsayılır. Böylece H hipotez ve S hüküm olmak üzere $H \wedge (\sim S)$ önermesinin doğru olduğu kabul edilir.Bununla beraber doğruluğu bilinenbir önermenin veya verilenlerden birinin yanlışlığı gerektirdiği gösterilirse bu durum $H \wedge (\sim S)$ önermesinin doğru olamayacağını gösterir. O halde H doğru iken $\sim S$ yanlış yani S doğrudur. Böylece teorem ispatlanır. bu yönteme olmayana ergi yöntemi denir.

Örnek 7 *"Dışarı çıkmazsam çalışacağım. Uyursam çalışmayacağım. O halde uyursam dışarı çıkacağım." önermesinin doğru olduğunu gösterelim.*

Çözüm 8

$$\begin{array}{lcl} p & : & \textit{Dışarı çıkarım} \\ q & : & \textit{Çalışacağım.} \\ r & : & \textit{Uyurum.} \end{array}$$

ifadelerini tanımlayalım. O halde verilenler,

$$\begin{array}{rcl} & \sim & p \Rightarrow q \\ r & \Rightarrow & \sim q \end{array}$$

olup sonuç ise

$$r \Rightarrow p$$

olur.

1. $\sim p \Rightarrow q$ ile $r \Rightarrow \sim q$ doğru $r \Rightarrow p$ yanlış olsun.
2. $\sim (r \Rightarrow p) \Leftrightarrow r \wedge (\sim p)$ doğru olur. Bu durumda r doğru p yanlıştır.
3. $\sim p \Rightarrow q$ doğru olduğundan q doğrudur.
4. $(r \Rightarrow \sim q)$ doğru olduğundan ve r doğru olduğunan $\sim q$ doğru olup q yanlıştır.
5. 3. ve 4. adımdan bir çelişki elde edilir.

O halde verilen teorem doğrudur.

1.0.5 Tümevarım Yöntemi

Bu yöntemi doğal sayılarla bağlı bir özelliği ispatlamak için aşağıdaki adımlar takip edilir.

1. Belirtilen özelliğin $n = 1$ için doğru olduğu gösterilir.
2. Belirtilen özelliğin $n = k$ için doğru olduğu kabul edilir ve $n = k + 1$ için doğruluğu ispatlanır.

Böylece verilen özelliğin her doğal sayı için doğru olduğu gösterilmiş olur.

Örnek 9 *Her n doğal sayısı için*

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

eşitliğinin doğru olduğunu gösteriniz.

Çözüm 10 *1.Adım: $n = 1$ için 1=1 verilen eşitlik sağlanır.*
2. Adım: $n = k$ için

$$1 + 2 + 3 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2} \tag{1}$$

eşitliğin doğru olduğunu kabul edelim. $n = k+1$ için doğru olduğunu gösterelim. (1) *eşitliğinin her iki tarafına $k+1$ ifadesi eklenirse*

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + ... + k + k + 1 &= \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise eşitliğin $n = k + 1$ içinde doğru olduğunu gösterir. O halde eşitlik her n doğal sayısı için gerçeklenir.