0.1 Alt Gruplar ve Yan Kümeler:

Tanım 1 *$(A,\circ)$ bir grup olmak üzere $B \subset A$ kümesi "$\circ$" işlemine göre bir grup oluşturuyorsa B ye A nın bir alt grubu denir.*

1. Her grup kendisinin bir alt grubudur.

2. Tek başına, birim eleman yardımıyla her grubun bir alt grubu oluşturulabilir. Yani e, $(A,\circ)$ grubunun bir elemanı ve $G=\{e\}$ olmak üzere $(G,\circ)$ grubu $(A,\circ)$ grubunun bir alt grubudur.

Örnek 2 *Tamsayılar bilinen çıkarma işlemine göre reel sayıların bir alt grubudur.*

Uyarı 3 *$(A,\circ)$ grubunun birim elemanı "e" olmak üzere bu grubun her alt grubununda birim elemanı "e" dir. Aksi taktirde alt grubun birim elemanı farklı ise bu birim elemanın tekliği ile çelişir. Aynı şekilde alt gruptan alınan bir elemanın tersi aynı zaman da grubun aynı elemanın tersi olmak zorundaır.*

Bir grubun alt grubu bulunurken grup özellikleri gösterileceği gibi aşağıdaki Teorem yardımıyla daha kolay gösterilebilir.

Teorem 4 *$(A,\circ)$ grubu verildiği zaman A kümesinin bir alt kümesi olan B nin bir alt grup olması için gerek ve yeter şart*
1. Her $a,\ b \in B$ için $a \circ b \in B$
2. Her $a \in B$ için $a^{-1} \in B$
özelliklerinin gerçeklenmesidir.

İspat: B, A nın bir alt grubu ise 1. ve 2. özelliklerinin sağlandığı açıktır.
Şimdi 1. ve 2. özellikleri sağlansın. Bu durumda 1. özellikten kapalılık sağlanır. 2. özellik ise ters elemanın varlığını garanti etmektedir. Yine 2. özellikten $a \circ a^{-1} = e$ olduğundan birim elemanın varlığını gösterir. Son olarak A kümesinden alınan her elemanı için $\circ$ işleminin birleşme özelliği olduğundan $B \subset A$ olduğundan B kümesi üzerindede birleşme özelliği sağlanır. O halde $(B,\circ)$ bir gruptur.

Teorem 5 *$(A,\circ)$ grubunun iki alt grubu $(B,\circ)$ ve $(C,\circ)$ ise $B \cap C,\ A$ grubunun $\circ$ işlemine göre bir alt grubudur.*

B, A grubunun $\circ$ işlemi altında bir alt grubu olsun. $a,\ b \in A$ olmak üzere

$$a \sim b \Leftrightarrow\ b^{-1} \circ a \in B$$

olsun.

Teorem 6 *$\sim$ bağıntısı A kümesi üzerinde bir denklik bağıntısıdır.*

İspat: i. $a \in A$ olsun. $a^{-1} \circ a = e \in B$ olduğundan $a \sim a$ yani simetri sağlanır.
ii. $a \sim b$ olsun. Bu durumda $b^{-1} \circ a \in B$ ve B bir grup olduğundan

$$\left(b^{-1} \circ a\right)^{-1} = a \circ b^{-1} \in B$$

olur. Bu durumda $b \sim a$ sağlanır. Yani simetri özelliği gerçeklenir.
iii. $a,\ b,\ c \in A$ olmak üzere $a \sim b$ ve $b \sim c$ sağlansın. Bu durumda

$$b^{-1} \circ a \in B \text{ ve } c^{-1} \circ b \in B$$

sağlanır. Buradan B, $\circ$ işlemi altında bir grup olduğundan

$$\begin{aligned} \left(c^{-1} \circ b\right) \circ \left(b^{-1} \circ a\right) &= c^{-1} \circ \left(b \circ b^{-1}\right) \circ a \\ &= c^{-1} \circ e \circ a = c^{-1} \circ a \in B \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $a \sim c$ olduğunu yani geçişme özelliğinin sağlandığını gösterir.
Dolayısıyla $\sim$ bağıntısı A kümesi üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

Tanım 7 *x, A grubunun bir elemanı ve B, A nın bir altgrubu olmak üzere*

$$x \circ B = \{x \circ b : b \in B\}$$

kümesine B kümesinin A kümesindeki Sol-Yan Kümesi denir.
Benzer olarak

$$B \circ x = \{b \circ x : b \in B\}$$

kümesine de B kümesinin A kümesindeki Sağ-Yan Kümesi denir.
Sağ ve Sol Yan kümeler genellikle birbirlerinden farklı kümelerdir. Fakat grup değişmeli ise

$$x \circ b = b \circ x$$

olacağından sağ ve sol yan kümeler aynı kümelerdir.

Teorem 8 *$D(x) = \{y \in A : y \sim x\}$, $\sim$ bağıntısının bir denklik sınıfı olsun. Bu durumda $D(x)$, A kümesinin bir sol yan kümesi yani*

$$S(x) = x \circ B$$

dir.

İspat: $y \in D(x)$ olsun. Buna göre $y \sim x$ olup $x^{-1} \circ y \in B$ gerçeklenir. Bu durumda $x^{-1} \circ y = b$ olacak şekilde bir $b \in B$ vardır.

$$\begin{aligned} x \circ x^{-1} \circ y &= x \circ b \\ y &= x \circ b \end{aligned}$$

olduğundan $y \in x \circ B$ elde edilir. Böylece $D(x) \subset x \circ B$ bulunur.
Şimdi $y \in x \circ B$ olsun. O halde $y = x \circ b$ olacak şekilde bir $b \in B$ vardır. $x^{-1} \circ y = b$ olup $x^{-1} \circ y \in B$, yani $y \sim x$ sağlanır. Böylece $y \in D(x)$ olup $x \circ B \subset D(x)$ gerçeklenir. Sonuç olarak

$$S(x) = x \circ B$$

elde edilir.

Teorem 9 *$a \in A,\ b_1,\ b_2 \in B$ ve $b_1 \neq b_2$ olmak üzere*

$$a \circ b_1 \neq a \circ b_2$$

gerçeklenir.

Tanım 10 *Bir sonlu grrubun elemanlarının sayısına o grubun Basamağı denir.*

Teorem 11 *(**LAGRANGE TEOREMİ**) A, n. basamaktan bir sonlu grup ve B, A grubunun m. basamaktan bir altgrubu olsun. Bu durumda m, n sayısının bir bölenidir.*

İspat: B nin k tane sol yan kümesinin olduğunu kabul edelim. Her yan kümenin tam m tane farklı elemanı vardır. Yan kümeler A kümesinin bir parçalanmasını oluşturduklarından bütün yan kümelerin birleşimi A kümesine eşittir.O halde $n = km$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ vardır.

0.2 Kuvvet Kuralı

Tanım 12 *Bir elemanın kuvveti aşağıdaki şekilde tanımlanır.*
1. $a^1 = a$
2. $n \in \mathbb{N}$ için a^n tanımlı ise $a^{n+1} = a.a^n$ olur.

Burada tümevarım kuralları uygulanmaktadır. Bu tanımı tamsayılara genişletelim.

Tanım 13 *$a^0 = e$ olarak ve $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere a^{-k} büyüklüğünü ise $\left(a^{-1}\right)^k$ olarak tanımlayalım.*

Aşağıdaki teoremi ispatsız olarak vereceğiz.

Teorem 14 *A bilinen çarpma işlemi altında bir grup ve $m,\ n \in \mathbb{Z}$, $a \in A$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.*
1. $a^n a^m = a^{n+m}$,
2. $a^{-n} a^n = e$,
3. $(a^n)^m = a^{nm}$.

Teorem 15 *$(A, \circ)$ bir grup ve $a \in A$ olsun. G ise a^n $(n \in \mathbb{Z})$ şeklindeki, a nın bütün kuvvetlerinin kümesi olsun. Bu durumda $(G, \circ)$ A nın bir Abelyen altgrubudur.*

0.3 Devirli Gruplar

Tanım 16 *A bir grup oslun. Eğer A grubunun her elemanı n tamsayısının özel bir değeri için a^n sayısına eşit olacak şekilde $a \in A$ sayısı varsa, A grubuna "a" tarafından üretilen Devirli Grup denir.*

Her devirli grup bir değişmeli gruptur. Teorem (15) de oluşturulan $(G, \circ)$ altgrubu A grubunun a tarafından üretilen devirli altgrubudur.

Grup işlemi bilinen tıoplama işlemi ise a^n yerine $n.a$ gösterimini kullancağız. Bu durumda $(\mathbb{Z}, +)$ 1 tarafından üretilen devirli bir gruptur.

Tanım 17 *A bir grup ve $x \in A$ olsun. x ile üretilen devirli grubun basamağına x elemanının basamağı denir.*
x in basamağı $x^k = e$ olacak şekildeki en küçük pozitif k sayısıdır. Böyle bir k sayısı bulunamıyorsa x Sonsuz Basamaktandır denir.

Tanım 18 *A nın B altgrubunun farklı sol-yan kümelerinin sayısına B nin A grubundaki İndisi denir. İndis pozitif bir tamsayı veya sonsuz olabilir.*

Teorem 19 *A sonlu grubunda bulunan x elemanının basamağı, grubun basamağının bir bölenidir.*

Tanım 20 *$(A, \circ)$ grubunun $(B, \circ)$ bir altgrubu olsun. Eğer B nin A daki her sol yan kümesi aynı zamanda A da sağ yan küme oluyorsa $(B, \circ)$ altgrubuna Normal Altgrup denir. Ohalde B nin A grubunun normal altgrubu olması için gerek ve yeter şart her $a \in A$ için*

$$a \circ B = B \circ a$$

olmasıdır.