# 1 BAĞINTILAR VE FONKSİYONLAR

Bu bölümde ilk olarak Matematikte çok önemli bir yere sahip olan Bağıntı kavramnı verip daha sonra ise Fonksiyon tanımı verip genel özelliklerini inceleyeceğiz.

**Tanım 1** *$A \times B$ kümesinin her alt kümesine $A$ dan $B$ ye bir bağıntı denir. Bağıntılar genellikle $\alpha,\ \beta,\ \gamma, ...$gibi sembollerle gösterilir. Eğer bağıntı $A$ dan $A$ ya ise, $A$ da bir bağıntı veya $A$ üzerinde bir bağıntı denir. $\beta$, $A$ dan $B$ ye bir bağıntı yani $\beta \subseteq A \times B$ olsun. $(x, y) \in \beta$ ise $x$ ile $y$ bağıntılıdır denir ve $x\beta y$ ile gösterilir. Eğer $(x, y) \notin \beta$ ise $x\not\beta y$ ile gösterilir.*

**Örnek 2** *$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a,\ b\}$ kümeleri için $A \times B$ kümesinin $\beta = \{(1, a), (2, a), (3, b)\}$ kümesi bir bağıntıdır.*

**Örnek 3** *$\beta$, $A$ dan $B$ ye bir bağıntı olsun.*

$$\beta^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in \beta\}$$

*olarak tanımlanan $\beta^{-1}$ bağıntısına $\beta$ nın ters bağıntısı denir. Bu durumda $\beta^{-1}$, $B$ den $A$ ya bir bağıntıdır.*

**Örnek 4** *$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a,\ b\}$ olmak üzere $\beta = \{(1, a), (2, a), (3, b)\}$ bağıntısının tersi*

$$\beta^{-1} = \{(a, 1), (a, 2), (b, 3)\}$$

*bağıntısıdır.*

## 1.1 Bağıntının Özellikleri

Bu kısımda herhangi bir $A$ kümesi üzerinde tanımlanan $\beta$ bağıntısının özelliklerini inceleyeceğiz.

**Tanım 5** *$A$ kümesinden alınan her $x$ elemanı için $x\beta x$ oluyorsa $\beta$ bağıntısı Yansıma özelliğine sahiptir denir.*

**Örnek 6** *$A = \{1, 2, 3\}$ ve $\beta = \{(x, y) : x,\ y \in A \text{ ve } x = y\}$ bağıntısı verilsin. Bu durumda*

$$\forall x \in A \Rightarrow (x, x) \in \beta$$

*gerçeklendiğinden $\beta$ yansıyandır.*

**Tanım 7** *$\beta$ bağıntısı $A$ kümesi üzerinde tanımlansın. Her $x,\ y \in A$ için $x\beta y$ olduğunda $y\beta x$ oluyorsa $\beta$ bağıntısına simetriktir denir. Yani,*

$$\beta \text{ simetriktir} \Leftrightarrow \forall (x, y) \text{ için } [(x, y) \in \beta \Rightarrow (y, x) \in \beta]$$

*olur.*

**Örnek 8** $A = \{1, 2, 3\}$ *olmak üzere*

$$\beta = \{(1,1)\,,\ (1,2)\,,\ (2,3)\,,\ (2,1)\,,\ (3,2)\,,\ (3,3)\}$$

*simetrik bir bağıntıdır.*

**Tanım 9** *$\beta$, $A$ kümesi üzerinde tanımlı bir bağıntı olsun. Her $x,\ y,\ z \in A$ için $x\beta y$ ve $y\beta z$ olduğunda $x\beta z$ oluyorsa $\beta$ bağıntısını Geçişken özelliği vardır veya $\beta$ Geçişken bir bağıntıdır denir. O halde*

$$\beta \text{ Geçişkendir} \Leftrightarrow \forall\,(x, y, z) \ \text{ için } \ [(x, y) \in \beta \text{ ve } (y, z) \in \beta \Rightarrow (x, z) \in \beta]$$

*dır.*

**Örnek 10** $A = \{1, 2, 3\}$ *olmak üzere*

$$\beta = \{(1,1)\,,\ (1,2)\,,\ (2,3)\,,\ (1,3)\,,\ (3,2)\,,\ (3,3)\}$$

*geçişken bir bağıntıdır.*

## 1.2 Denklik Bağıntı

**Tanım 11** *$A$ kümesi üzerinde tanımlanan bir $\beta$ bağıntısı yansıyan, simetrik ve geçişken ise $\beta$ bağıntısına $A$ kümesi üzerinde bir Denklik Bağıntısıdır denir.*

**Örnek 12** $A = \{1, 2, 3\}$ *olmak üzere*

$$\beta = \{(1,1)\,,\ (1,2)\,,\ (1,3)\,,\ (2,1)\,,\ (2,2)\,,\ (2,3)\,,\ (3,1)\,,\ (3,2)\,,\ (3,3)\}$$

*bağıntısı yansıyan, simetrik ve geçişken olduğundan bir Denklik Bağıntısıdır.*

**Tanım 13** *$A$ boştan farklı bir küme olmak üzere $A$ kümesinin altkümelerinin bir ailesi $P$ olsun. Eğer $P$ ailesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, $P$ ye $A$ kümesinin bir parçalanması denir.*

1. $P$ deki tüm kümeler boş olmayan kümelerdir.
2. $P$ deki kümeler ikişer ikişer ayrık yani, her $A_1,\ A_2 \in A$ için $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ dir.
3. $A$ kümesinin her elemanı, $P$ ye ait bir kümenin de elemanıdır.

**Tanım 14** *$A$ kümesi üzerinde tanımlı bir denklik bağıntısı $\beta$ olsun. $(x, y) \in \beta$ ise, $y$ elemanına $\beta$ bağıntısı ile bağlı $x$ elemanına Denk Eleman denir. $A$ kümesi üzerinde $x$ elemanına denk olan bütün elemanların kümesine $x$ in denklik sınıfı denir. Başka bir ifadeyle $x \in A$ için*

$$A\,(x) = \{y \in A : y\beta x\}$$

*ile tanımlana $A\,(x)$ kümesine $\beta$ bağıntısının bir Denklik sınıfı denir.A kümesinden alınan her eleman için denklik sınıfı oluşturulabilir.*

**Örnek 15** *Tamsayılar kümesi olan* $\mathbb{Z}$ *de*

$$\beta = \{(x, y) : x,\ y \in \mathbb{Z} \text{ ve } x - y \text{ tek tamsayı}\}$$

*bir denklik bağıntısıdır. Şimdi 1 ve 2 elemanlarının denklik sınıflarını bulalım.*

$$\begin{aligned} A(1) &= \{y : y \in \mathbb{Z} \text{ ve } 1 - y \text{ tek tamsayı}\} \\ &= \{..., -4,\ -2,\ 0,\ 2,\ 4, ...\} \end{aligned}$$

*ve*

$$\begin{aligned} A(2) &= \{y : y \in \mathbb{Z} \text{ ve } 1 - y \text{ tek tamsayı}\} \\ &= \{..., -3,\ -1,\ 1,\ 3,\ 5, ...\} \end{aligned}$$

*elde edilir. Dikkat edilecek olursa* $A(1)$ *bütün çift tamsayıların kümesini* $A(2)$ *ise bütün tek tamsayıların kümesini oluşturmaktadır. Burada sadece* $A(1)$ *ve* $A(2)$ *denklik sınıflarını elde edebiliriz. Örneğin* $A(1) = A(7)$ *ve* $A(2) = A(0)$ *dır.*
*Ayrıca parçalanma tanımına dikkat edilirse* $A(1)$ *ve* $A(2)$, $\mathbb{Z}$ *nin bir parçalanmasını oluştururlar.*

**Lemma 16** *A boş olmayan bir küme ve A kümesi üzerinde tanımlı bir denklik bağıntısı* $\beta$ *olsun. Bu durumda her* $x \in A$ *için* $A(x) \neq \emptyset$ *dir.*

**Proof.** $\beta$ bağıntısı yansıyan olduğundan $x \in A(x)$ olup $A(x) \neq \emptyset$ dir. ■

**Lemma 17** $x,\ y \in A$ *olsun.* $x \in A(y)$ *ise,* $y \in A(x)$ *olur.*

**Proof.** $x \in A(y)$ olsun. Bu durumda $\beta$ simetrik olduğundan $x\beta y \Rightarrow y\beta x$ olup $y \in A(x)$ bulunur. ■

**Lemma 18** $x \in A(y)$ *ise* $A(x) = A(y)$ *dir.*

**İspat:** İspatı iki adımda yapacağız. İlk olarak $A(x) \subseteq A(y)$ olduğunu gösterelim. $a \in A(x)$ olsun. O halde $a\beta x$ dir. Hipotezden $x \in A(y)$ olduğundan $x\beta y$ olup geçişme bağıntısından $a\beta y$ yani $a \in A(y)$ bulunur. Böylece

$$A(x) \subseteq A(y) \tag{1}$$

elde edilir. Şimdi $a \in A(y)$ olsun. O halde $a\beta y$ dir. Hipotezden $x \in A(y)$ olduğundan $x\beta y$ olup simetriden dolayı $y\beta x$ olup geçişme bağıntısından $a\beta x$ yani $a \in A(x)$ bulunur. Böylece

$$A(y) \subseteq A(x) \tag{2}$$

elde edilir. (1) ve (2) den $A(x) = A(y)$ bulunur.

**Lemma 19** $x \notin A(y)$ *ise* $A(x) \cap A(y) = \emptyset$ *dir.*

**İspat:** Lemmanın kontrapozitifini ispat edelim. Bu durumda $A(x) \cap A(y) \neq \emptyset$ ise $x \in A(y)$ dir. $A(x) \cap A(y) \neq \emptyset$ olduğundan en az bir $a \in A(x) \cap A(y)$ vardır. Bu taktirde $a\beta x$ ve $a\beta y$ dir. Simetriden dolayı $x\beta a$ olup geçişkenlikten $x\beta y$ bulunur. Böylece $x \in A(y)$ elde edilir.

**Teorem 20** *$\beta$, $A$ üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. $\beta$ nın denklik sınıflarının $P$ topluluğu $A$ kümesinin bir parçalanmasını oluşturur.*

**İspat:** Lemma (16) den denklik sınıflarının hiç birisi boş değildir. $x,\ y \in A$ verildiğinde Lemma (18) ve Lemma (19) den $A(x) = A(y)$ olabilmesi için gerek ve yeter şart $A(x) \cap A(y) \neq \emptyset$ olduğu açıktır. O halde, $P$ deki kümeler ikişer ikişer ayrıktır. $x \in A(x)$ olduğundan , $A$ kümesindeki her eleman $P$ deki kümelerden birisine aittir. Böylece parçalanmanın üç şartıda sağlanmış olur.

**Teorem 21** *$P$ boş olmayan bir $A$ kümesinin bir parçalanması olsun. $x,\ y \in A$ olmak üzere, $A$ kümesi üzerindeki $\gamma$ bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlansın:*
*"$x\gamma y$ olması için gerek ve yeter şart $x$ ve $y$ nin $P$ parçalanmasına göre aynı kümenin elemanı olmasıdır."*
*Bu durumda $\gamma$, $A$ kümesi üzerinde bir denklik bağıntısıdır.*

**Tanım 22** *$A$ kümesi üzerinde tanımlı bir denklik bağıntısı $\beta$ olsun. $\beta$ bağıntısının $A$ cümlesinden ayırdığı tüm denklik sınıflarının kümesine $A$ nın $\beta$ bağıntısına göre Bölüm Kümesi denir ve $A/\beta$ ile gösterilir.*

**Örnek 23** *$\beta = \{(x,y) : x,\ y,\ k \in \mathbb{Z}$ ve $(x+y) = 3k\}$ bağıntısı $\mathbb{Z}$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntının denklik sınıfları ,*

$$\begin{aligned} A(0) &= \{..., -9,\ -6,\ -3,\ 0,\ 3,\ 6,\ 9, ...\} \\ A(1) &= \{..., -7,\ -4,\ -1,\ 2,\ 5,\ 8,\ 11, ...\} \\ A(2) &= \{..., -8,\ -5,\ -2,\ 1,\ 4,\ 7,\ 10, ...\} \end{aligned}$$

*elde edilir. Buna göre $\mathbb{Z}/\beta = \{A(0),\ A(1),\ A(2)\}$ dir.*

## 1.3 Kısmi Sıralamalar

**Tanım 24** *$\beta$ bağıntısı $A$ kümesi üzerinde tanımlansın. Her $x,\ y \in A$ için $x\beta y$ ve $y\beta x$ olduğunda $x = y$ ise $\beta$ bağıntısına antisimetriktir denir.*

**Tanım 25** *$A$ kümesi üzerinde bir $\prec$ bağıntısı yansıyan, antisimetik ve geçişken ise bu bağıntıya $A$ kümesinin bir Kısmi Sıralaması denir.*

$$(x,y) \in \prec \Leftrightarrow x \prec y$$

*dir. $x \prec y$ ifadesi $\prec$ sıralamasına göre $x$, $y$ den önce gelir diye okunur.*

$\mathbb{R}$ de tanımlanan $\leq$ bağıntısı bir kısmı sıralama bağıntısıdır.

**Tanım 26** *$A$ kümesi üzerinde tanımlı bir sıralama bağıntısı $\prec$ olmak üzere, $x,\ y \in A$ için $x \prec y$ ya da $y \prec x$ ise $x$ ve $y$ elemanlarına $\prec$ bağıntısına göre karşılaştırılabilir elemanlar denir.*

**Tanım 27** *$A$ kümesinin her $x,\ y$ eleman çifti bu küme üzerinde tanımlanan $\prec$ bağıntısına göre karşılaştırılabiliyorsa, $A$ kümesine Tam Sıralı küme denir. Bu tanıma göre $A$ kümesinin tam sıralı olması için gerek ve yeter şart*

$$\forall x, y \in A \text{ için } x \prec y \vee y \prec x$$

*olmasıdır.*

**Tanım 28** *Eğer $\prec$, $A$ kümesi üzerinde bir kısmi sıralama ise $(A, \prec)$ ikilisine Kısmi sıralanmış küme, $\prec$ bir tam sıralama ise $(A, \prec)$ ikilisine bir Tam Sıralanmış küme ya da kısaca Sıralı Küme denir.*

**Örnek 29** *$\mathbb{R}$, $\leq$ bağıntısı ile sıralı bir kümedir.*

**Örnek 30** *$A = \{0, 1\}$ olmak üzere $A$ kümesinin $P(A)$ kuvvet kümesi üzerinde tanımlı $\subseteq$ bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısı olduğu halde tam sıralama değildir. Örneğin $\{0\} \in P(A)$ ve $\{1\} \in P(A)$ olduğu halde $\{0\} \nsubseteq \{1\}$ ve $\{1\} \nsubseteq \{0\}$ dır.*

**Teorem 31** *Bir $A$ kümesinde tanımlanan bir sıralama bağıntısının tersi $A$ kümesi üzerinde tanımlı bir sıralama bağıntısıdır.*