GEREKLİ BAĞINTILAR

Bu derste kullanılacak olan integral gösterimleri:

$\int_C \ldots d\ell$	Çizgi integrali – tek katlı bir integral
$\oint_C \ldots d\ell$	Kapalı bir yol boyunca alınan çizgi integrali – tek katlı bir integral
$\int_S \ldots ds$	Yüzey integrali – iki katlı bir integraldir. Kolaylık olması açısından tek katlı integral şeklinde gösterilir.
$\int\int \ldots dx\, dy$	Örnek teşkil etmesi açısından kartezyen koordinatlarda yazılan yüzey integrali
$\oint_S \ldots ds$	Kapalı bir yüzey integrali
$\int_V \ldots dV$	Hacim integrali – üç katlı bir integraldir. Kolaylık olması açısından tek katlı integral şeklinde gösterilir.
$\int\int\int \ldots dx\, dy\, dz$	Örnek teşkil etmesi açısından kartezyen koordinatlarda yazılan hacim integrali

Vektör Fonksiyonları İçeren İntegraller

$$\int_V \vec{F}\, dV$$

$\vec{F}$ bir vektör fonksiyonu olmak üzere tanımlanan hacim integrali, uygun koordinat sisteminde bileşenleri cinsinden üç skaler integralin toplamı biçiminde yazılabilir. "dV" diferansiyel hacim elemanı olmak üzere, bu integral gösterimi üç boyutta üç katlı integralin kolay bir gösterimi olarak düşünülebilir.

Vektör Fonksiyonları İçeren İntegraller

$$\int_C \phi \, d\vec{\ell}$$

ϕ skaler bir fonksiyonu, $d\vec{\ell}$ uzunluktaki küçük bir artışı gösterir, C ise integralin alındığı yoldur. İntegtal herhangi iki nokta arasında ise integral $\int_a^b \phi \, d\vec{\ell}$ şeklinde yazılabilir. İntegral kapalı bir yol boyunca alınırsa $\oint_C \phi \, d\vec{\ell}$ olur. Kartezyen koordinatlarda ise

$$\int_C \phi \, d\vec{\ell} = \int_C \phi(x,y,z) \left[\hat{a}_x \, dx + \hat{a}_y \, dy + \hat{a}_z \, dz \right]$$

Vektör Fonksiyonları İçeren İntegraller

$$\int_C \vec{F} \bullet d\vec{\ell}$$

Her iki integralin sonucu da skalerdir. C üzerinden olan integral bir çizgi integralini gösterir. Örneğin $\vec{A}$ bir kuvvet vektörü ise integral, herhangi bir C yolu boyunca iki nokta arasında hareket eden bir cisim üzerine kuvvet tarafından yapılan işi verir. $\int_S \vec{F} \bullet d\vec{s} = \int_S \vec{F} \bullet \hat{a}_n \, ds$ burada "s" bir yüzey integralidir

Vektör Fonksiyonları İçeren İntegraller

$$\int_S \vec{F} \bullet \hat{a}_n \, ds$$

İntegral, bir vektör alanının S yüzeyi boyunca akısını tanımlar. Eğer S açık bir yüzey ise $\hat{a}_n$'nin pozitif yönü açık yüzeyin çevresinin yönelimine bağlıdır. Normal vektörün yönünü bulmak için sağ el kuralı uygulanır. Sağ elin dört parmağı çevrenin dolanım yönünde seçilirse başparmak $\hat{a}_n$'nin pozitif yönünü gösterir.

Yüzey integrali bir hacim elemanı içinde kapalı bir yüzey ise, o zaman $\hat{a}_n$'nin pozitif yönü daima hacim elemanından dışarıya doğrudur.

$\vec{\nabla}$ Operatörü

Del operatörü bir vektör diferansiyel operatördür. Kartezyen, silindirik ve küresel koordinatlarda tanımlanabilir. Kartezyen koordinatlarda

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\,\hat{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\,\hat{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\,\hat{a}_z$$

şeklinde yazılır. Vektör diferansiyel operatör, gradyent operatörü olarak da bilinir. Operatör kendi içinde bir vektör değildir, bir skaler fonksiyona vurulduğunda bir vektör meydana gelir.

Del operatörü

- ϕ skaler bir fonksiyon olmak üzere $\vec{\nabla}\phi$ şeklinde yazılırsa bir skalerin gradyenti,

- $\vec{F}$ bir vektör olmak üzere $\vec{\nabla}\bullet\vec{F}$ şeklinde yazılıyorsa bir vektörün diverjansı,

- $\vec{F}$ bir vektör olmak üzere $\vec{\nabla}\times\vec{F}$ şeklinde yazılıyorsa bir vektörün rotasyoneli olur.

- Bir ϕ skalerinin Laplasyeni ise $\vec{\nabla}\bullet\vec{\nabla}\phi=\nabla^2\phi$ şeklindedir.

Gradyent

Bir skalerin maksimum artış oranının yönü ve büyüklüğü, skalerin gradyenti olarak bir vektörle gösterilebilir. Kartezyen koordinatlarda

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\,\hat{a}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y}\,\hat{a}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z}\,\hat{a}_z$$

Diverjans

$\vec{F}$ vektörünün her hangi bir noktadaki diverjansı, bu nokta civarında hacim sıfıra giderken birim hacimden dışarı çıkan net akı olarak tanımlanır.

$$\mathrm{div}\vec{F} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_s \vec{F} \bullet d\vec{s}}{\Delta V}$$

$\mathrm{div}\vec{F}$ skaler bir niceliktir, büyüklüğü $\vec{F}$'nın kendisi değiştikçe bir noktadan diğerine değişebilir. Akı kaynağının gücünün bir ölçüsüdür. Kartezyen koordinatlarda :

$$\mathrm{div}\vec{F} \equiv \vec{\nabla} \bullet \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Rotasyonel

Bir vektör alanın rotasyoneli, büyüklüğü alan sıfıra giderken birim yüzey başına $\vec{F}$'nın maksimum net dolanımının büyüklüğüne eşit olan bir vektördür.

$$\text{rot}\,\vec{F} \equiv \vec{\nabla}\times\vec{F} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\oint_s \vec{F}\bullet d\vec{\ell}}{\Delta s}$$

Kartezyen koordinatlarda,

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Diverjans Teoremi

Bir vektör alanının diverjansı birim hacimden dışarı çıkan net akı olarak tanımlanır. Vektör alanının diverjansının hacim integrali, bu hacmi sınırlayan yüzey boyunca dışarı akan toplam akıya eşittir.

$$\oint_S \vec{F} \bullet d\vec{s} = \int_V \vec{\nabla} \bullet \vec{F}\, dV$$

$d\vec{s}$'in yönü daima yüzeye dik ve hacimden dışarı doğrudur.

Stokes Teoremi

Açık bir yüzey üzerinden bir vektör alanının rotasyonelinin yüzey integrali, yüzeyin sınırlandığı kontur boyunca vektörün kapalı çizgi integraline eşittir.

$$\int_S \left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\bullet d\vec{s} = \oint_C \vec{F}\bullet d\vec{\ell}$$

Stokes teoreminin sağlanabilmesi için $\vec{F}$ vektör alanı birinci mertebeden türevlenebilir ve S yüzeyi üzerinde, C boyunca sürekli olmalıdır. $\vec{\nabla}\times\vec{F}$'nın yüzey integrali kapalı bir yüzey üzerinden ise

$$\oint_S \left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\bullet d\vec{s} = 0$$

Özdeşlikler

❖ $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\phi)\equiv 0$ Her hangi bir skalerin gradyentinin rotasyoneli sıfıra eşittir (ϕ ve birinci mertebeden türevleri mevcut olmalıdır.).

Vektör alanı rotasyonelden bağımsızsa skaler bir alanın gradyenti olarak açıklanabilir. Örneğin vektör alanı elektrik alan olsun, $\vec{\nabla}\times\vec{E}=0$ ise, $\vec{E}=-\vec{\nabla}\phi$ olur. Vektör alanın rotasyoneli sıfırsa alan korunumludur, böylece korunumlu bir vektör alanı daima skaler bir fonksiyonun gradyenti olarak açıklanabilir.

Özdeşlikler

- $\vec{\nabla}\bullet(\vec{\nabla}\times\vec{F})\equiv 0$ Herhangi bir vektör alanının rotasyonelinin diverjansı sıfıra eşittir.

Vektör alanı manyetik alan olsun. $\vec{\nabla}\bullet\vec{B}=0$ ise bir $\vec{A}$ vektör alanı tanımlayabiliriz, öyle ki $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ olur. Manyetik alanın diverjansının olmaması demek ortamda bir kaynak veya anaforun olmaması demektir. Tıpkı bir selenoidin alanı gibi...

Helmholtz teoremi: Bir vektör alanı eğer diverjansı ve rotasyoneli her yerde tanımlanabilirse, belirlenebilir.

KAYNAKLAR

Bu ders notları aşağıda verilen kaynaklardan derlenmiştir. Detaylı bilgi için bu kaynaklara başvurulabilir.

- Elektrik ve Magnetizma – 2, Berkeley Fizik Dersleri Edward M. Purcell
- Elektromagnetik Teori / David J. Griffiths
- MIT "Physics 8.02 Electricity and Magnetism" ders notları

http://web.mit.edu/viz/EM/visualizations/coursenotes/index.htm (son erişim tarihi:18 Kasım 2017)

- University of Colorado Boulder "PHYSICS 1120" Ders notları

https://www.colorado.edu/physics/phys1120/phys1120_sp08/notes/scan_table.html (son erişim tarihi 18 Kasım 2017)

- Mühendislik Elektromanyetiğinin Temelleri David K. Cheng,
- Fen Bilimcileri ve Mühendisler için Fizik, D.G. Giancoli