0.1 Kardinalite

A ve B kümeleri verilmiş olsun. Bu kümeler üzerinde $\sim$ bağıntısı " A kümesinden B kümesi üzerine bire bir bir dönüşüm bulunması" şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\sim$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Eğer $A \sim B$ ise A ve B kümelerinin Kardinal Sayıları Aynıdır denir. Örneğin $A \sim B$ ise, A kümesinin beş elemanı varsa B kümesininde beş elemanı vardır. Burada dikkat edilmelidirki bu tanım yalnızca kümelerin kardinal sayılarının aynı olmasına ilişkin olup kardinal sayının kendisi tanımlanmamaktadır. Sonlu kümeler için bu durum aynı sayıda eleman içermesine eşdeğerdir.

0.2 Russell Paradoksu

Bir sorunun cevabına ne doğru ne de yanlış diyemiyorsak bir Paradoks ile karşı karşıyayız demektir. Nicolas Baurbaki bu konuda;

"Ünlü paradokslar, on yıllar bazen de yüzyıllar boyunca mantıksal düşünceyi beslemiştir."

"Bu sayfada yazılı olan hiçbir şeyi okumayın." gibi buna benzer paradokslar ya kendileriyle çelişiyor gibi görünür, anlamsız ya da şaşırtıcı sonuçlara varır; ya da kısır döngü biçimindedir.

Paradokslar yüzyıllar boyunca insanları büyülemiş ve hayrete düşürmüştür. Paradokslara, Edebiyat, bilim ve Matematik'ten günlük yaşama kadar çok değişik alanlarda rastlanır. Ne tür paradoks olursa olsun ortaya çıkan sorular ve karışıklık hem ilginç, hem de eğlendiricidir. Özellikle Matematiksel paradokslar yeni buluşlara yol açabilir.

Paradoks Örnekleri

Bazı bilinen paradokslardan örneklere bakalım:

1) İkiye Bölme Paradoksu: Bir yolcu, belirli bir uzaklığa gidecektir. Önce gideceği yolun yarısını; sonra kalan yarısını; sonra kalanının yarısını;... yürümek zorundadır. Bu durumda hiçbir zaman gideceği yolun sonuna ulaşamayacaktır.

2) Euqlides Paradoksu: "Yaptığım açıklama yanlıştır."

3) Avukat Paradoksu: Yunanlı ünlü avukat Protogras, verdiği özel dersin ücreti ile ilgili olarak öğrencisiyle bir anlaşma yapar. Bu anlaşmaya göre öğrencisi aldığı ilk davayı kazanırsa bu ücreti avukata ödeyecek, kazanamazsa ödemeyecektir.

Dersin bitiminden hemen sonra herhangi bir dava almayan öğrenciden ses seda çıkmaz. Sabrını yitiren avukat, bir dava açarak bu ücreti öğrencisinden talep eder. Yeni avukat olan öğrenci bu ilk davasında kendini savunmayı üstlenir.

Bu davayı öğrenci kazanırsa ilk davasını kazanmış olacağı için davayı kaybeden hocasına parayı ödemek zorunda kalacaktır.

Tersine davayı kaybederse bu kez de davayı kaybettiği için hocasına yine ödeme yapmak zorunda kalacaktır.

4) Epimenides Paradoksu: Epimenides Giritli idi. Ve paradoksu şöyleydi; "Bütün Giritliler yalancıdır".

5) Walt Kelley Paradoksu: "Düşmanla karşılaştık ve o biziz".

6) Berber Paradoksu: Bu paradoks 1918'de çıkmıştır. Bir köyde, bir berber, kendi traş olmayan herkesi traş eder. Berberi kim traş edecek?

7) Oscar Wilde Paradoksu: "Günah işlemenin tek yolu onu kabul etmektir".

Yukarda sözünü ettiğimiz paradoksların bir benzerini ünlü matematikçi ve filozof Bertrand Russell 1901'de, daha henüz 28 yaşındayken bulmuştur. O günün matematiğinin çelişkiden yoksun olmadığını gösteren bu paradoks tahmin edileceği gibi matematiği ve matematikçileri sarsmış ve onları matematiğin temelleri üzerine daha derin düşünmeye zorlamıştır.

Küme kavramı, Yunanlılardan beri biliniyordu. Daha sonra Alman Matematikçi Georg Cantor (1845–1918) küme kuramını matematiksel olarak ortaya attı. O zamanlar bir nesnenin küme olabilmesi için birtakım koşulların gerektiği daha bilinmiyordu. Akla gelebilecek tüm nesnelerin bir küme oluşturabileceği sanılıyordu. Hele küme gibi çok "doğal" bir kavramın günün birinde matematiği çelişkiye düflüreceği akıllara hiç gelmiyordu.

Bir A kümesi kendisinin bir elemanı ise A kümesine Olağandışı Küme aksi halde Olağan küme denir. Örneğin bütün tamsayıların oluşturdu küme bir tam sayı değildirdolayısıyla bir olağan kümedir. Şimdi RUSSEL PARADOKSU olarak bilinen aşağıdaki ifadeyi inceleyelim.

"A kümesi bütün olağan kümelerin bir topluluğu olsun ve A nın bir küme olduğunu kabul edelim. Acaba A kümesi olağan bir küme midir?"

Eğer $A \in A$ ise, A olağandışıdır ve A nın tanımına göre $A \notin A$ olmalıdır. Bu ise bir çelişkidir. Aksine $A \notin A$ ise, A kümesi bir olağan kümedir ve A kümesine ait olmalı yani $A \in A$ olmalıdır. Bu yine bir çelişkidir.

Aslında buradaki paradoks A nın bir küme olarak değerdirilmesidir. Yani, bir takım elemanların tanımlanabilen her topluluğu bir küme olarak düşünülmemelidir. Russell paradoksu ve buna benzeyen bazı zorluklar kümeler teorisinin tutarlı bir temel üzerine kurulmamış olabileceği düşüncesini ortaya çıkartmıştır. Bunun üzerine 20. yüzyılın başalrında kümeler teorisinin aksiyomatik yapısı araştırılmış ve üç farklı yaklaşım ortya çıkmıştır.

Birincisinde, Zermelo $(1904 - 1908)$ tarafından başlatılmış ve Fraenkel ile Skolem $(1921 - 1929)$ tarafından devam edilmiştir. Bu yöntemle çok geniş topluluklar imcelemenin dışında tutularak, Russell Paradoksu önlenmiştir.

İkinci yaklaşımRussell ile Whitehead $(1910 - 1913)$ tarafından ortya atılmıştır. Bu yaklaşım ile kümeler arasında bir hiyerarşik yapı düşünülmüştür. Buna göre $X \in Y$ ise Y kümesinin X den bir basamak yüksek düzeyde olduğu varsayılmıştır. Böylece sistemde bütün kümelerin bir kümesi gibi bir kavram bulunmamaktadır.

Son yaklaşım ise Von Neumann $(1925 - 1929)$, Bernay $(1937 - 1954)$ ve Gödel' e (1940) aittir. Burada ise kümelerin yanı sıra sınıf adını alan bazı özel büyük topluluklar düşünülmüştür. Böylece, bütün olağan kümeleri içeren A topluluğu bir sınıf oluşturacak ve $A \in A$ olması önlenebilecektir.