1 KÜMELER KAVRAMI

Küme, "nesneler topluluğu " olarak tanımlanan bir matematik terimidir. Bu tanımdaki "nesne" soyut ya da somut bir ifadedir; fakat her ne olursa olsun iyi tanımlanmış olmalıdır. Örneğin, "Ankara da yaşayan öğrencilerin topluluğu", "Türkiye deki tüm dağların topluluğu", "100 den küçük çift doğal sayıların topluluğu" cümlelerindeki nesnelerin anlaşılabilir, belirgin oldukları, kısaca iyi tanımlı oldukları açıktır. Dolayısıyla bu cümlelerin her biri bir kümeyi tarif eder. O halde, matematikte "İyi tanımlı nesnelerin bir topluluğuna küme denir" biçiminde bir tanımlama sezgisel olarak ilk başta yeterli olacaktır.

Bir kümeyi oluşturan nesnelere o kümenin elemanları adı verilir. Örneğin 2, 100 den doğal sayılar kümesinin bir elemanı olduğu halde 5 aynı kümenin bir elemanı değildir.O halde küme tanımına göre bir eleman ya kümenin içindedir ya da değildir.

Küme kavramının matematiğe Georg Cantor (1845-1918) ile girdiği kabul edilir. Elbette Cantor'dan önce de, adına küme denilmese de, matematikçiler bu kavramı yer yer örtülü bir şekilde kullanıyorlardı. Cantor, kümeler kuramının temellerine ilişkin kapsamlı soruları ortaya koydu.

Bu bölümde amacımız kümeler kavramını aksiyomatik olarak kurarak temel kavramları incelemektir.

Definition 1 *Nesnelerin bir topluluğuna küme denir. Kümeler genellikle A, B, C, ... gibi büyük harflerle gösterilir.*

Definition 2 *Bir kümede bulunan nesnelere kümenin elemanları denir. Kümenin elemanları a, b, c, ... gibi küçük harflerle gösterilir.*

Eğer bir x elemanı A kümesinin bir elemanı ise $x \in A$ ile, x elemanı A kümesinde bulunmuyorsa $x \notin A$ ile gösterilir.

Example 3 *Türk alfabesindeki tüm sesli harflerden oluşan A kümesi*

$$A = \{a,\ e,\ ı,\ i,\ o,\ ö,\ u,\ ü\}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $a \in A$ olduğu halde $b \notin A$ olur.

Example 4 *10 dan küçük olan tek sayılar kümesini*

$$B = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$$

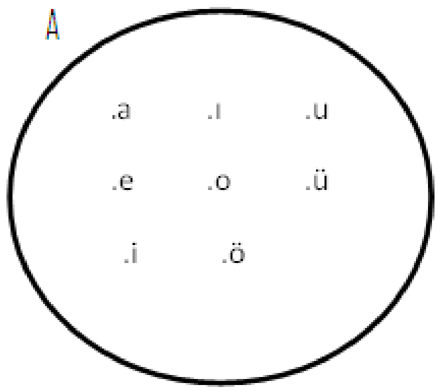
ile gösterebiliriz.

Bazen kümenin eleman sayısı çok veya sonsuz olabilir. Bu durumda örnek 3 ve 4 deki gibi liste yöntemi yapmak yerine küme belirli bir kural izlenerek kurulabilir. Bu durumda

$$A = \{x : p(x)\}$$

veya

$$A = \{x \mid p(x)\}$$



$p(x)$ şartını sağlayan x elemanlarının kümesidir. Örneğin tüm rasyonel sayılar kümesi olan Q kümesini

$$Q = \left\{ x : x = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z} \text{ ve } q \neq 0 \right\}$$

ile gösterilebilir.

Definition 5 *Aynı elemanlardan oluşan iki kümeye eşit kümeler denir.* $A = B$ *ile gösterilir ve* A *eşit* B *diye okunur.*

Example 6 $A = \{1,\ 3,\ 5\}$ *ve* $B = \{5,\ 1,\ 3\}$ *kümeleri eşit elemanlara sahip olduğundan eşit kümelerdir.*

Remark 7 *Herhangi bir kümede verilen elemanlar arasında herhangi bir sıralama yoktur.*

Remark 8 *Bazı cümleler kapalı bir eğri ile sınırlanmış şekiller yardımıyla gösterilebilir. Bu tür gösterimlere Venn Diyagramı ile gösterme denir. Örneğin Türk alfabesindeki sesli harfleri aşağıdaki gibi gösterebiliriz.*

Definition 9 *Bir* A *kümesinin her elemanı başka bir* B *kümesinin de elemanı oluyorsa* A *kümesine* B *kümesinin bir alt kümesi denir.* $A \subseteq B$ *veya* $B \supseteq A$ *ile gösterilir. Örneğin doğal sayılar kümesi olan* $\mathbb{N}$ *reel sayılar kümesi olan* $\mathbb{R}$ *nin bir alt kümesidir, yani* $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ *olur.*

Yukarıda verilen tanım gereğince $A \subseteq B$ olması için gerek ve yeter şart her $x \in A$ için $x \in B$ olmalıdır. Eğer en az bir $x \in A$ için $x \notin B$ oluyorsa A kümesi B kümesinin alt kümesi değildir. Bu durum ise $A \nsubseteq B$ ile gösterilir.

Definition 10 *Hiç bir elemanı olmayan kümeye boş küme denir ve* $\emptyset$ *ile gösterilir.*

Theorem 11 *Her A kümesi için aşağıdaki özellikler sağlanır.*
i) $\varnothing \subseteq A$ *ii)* $A \subseteq A$

Theorem 12 *A ve B kümelerinin birbirine eşit olması için gerek ve yeter şart $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ olmasıdır.*

Definition 13 *A ve B kümeleri için $A \subseteq B$ olduğunda A kümesi B kümesine eşit olmuyorsa yani $A \neq B$ ise A kümesine B kümesinin öz alt kümesi denir.*

Definition 14 *Bir A kümesinin tüm alt kümelerinden oluşan kümeye A kümesinin kuvvet kümesi denir ve $P(A)$ ile gösterilir.*

Example 15 *$S = \{0,\ 1,\ 2\}$ kümesinin kuvvet kümesini bulunuz.*

Solution 16 *$P(S) = \{\emptyset,\ \{0\},\ \{1\},\ \{2\},\ \{0,1\},\ \{0,2\},\ \{1,2\},\ \{0,\ 1,\ 2\}\}$ bulunur. Burada boş küme ve kümenin kendisinin de kuvvet kümesinin bir elemanı olduğuna dikkat edilmelidir.*

Definition 17 *Belirli bir incelemede ele aldığımız tüm kümeleri bir alt küme olarak alan kümeye evrensel küme denir ve E harfi ile gösterilir.*

1.1 Kümeler Üzerine İşlemler

Definition 18 *A ve B kümeleri verilsin. A kümesi veya B kümesi içinde bulunan elemanlardan oluşan kümeye A ve B kümelerinin birleşimi denir ve $A \cup B$ ile gösterilir. A ve B kümelerinin birleşimi*

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

şeklinde simgesel olarak yazılabilir.

Definition 19 *A ve B kümeleri verilsin. Hem A kümesi hem de B kümesi içinde bulunan elemanlardan oluşan kümeye A ve B kümelerinin kesişimi denir ve $A \cap B$ ile gösterilir. A ve B kümelerinin kesişimi*

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

şeklinde simgesel olarak yazılabilir.

Example 20 *$A = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ ve $B = \{0,\ 1,\ 5,\ 6,\ 7\}$ kümeleri verilsin. Bu durumda*

$$A \cup B = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$$

ve

$$A \cap B = \{0,\ 1\}$$

olur.

Definition 21 *Ortak hiç bir elemanı olmayan iki kümeye ayrık kümeler denir. A ve B kümelerinin ayrık olması için gerek ve yeter şart $A \cap B = \emptyset$ olmasıdır.*

Definition 22 *A kümesi E kümesinin bir alt kümesi olmak üzere E kümesinin A kümesinin içinde bulunmayan elemanlarının oluşturduğu kümeye A kümesinin E kümesine göre tümleyeni denir ve A^c ile gösterilir. Simgesel olarak*

$$A^c = \{x : x \in E \wedge x \notin A\}$$

gösterilir. Ayrıca $A \cup A^c = E$ olduğu açıktır.

Definition 23 *A ve B kümeleri verilsin. A kümesinin içinde bulunan fakat B kümesinde bulunmayan elemanların oluşturduğu kümeye A ile B kümesinin farkı denir ve $A \backslash B$ veya $A - B$ ile gösterilir. A ile B kümesinin farkı*

$$\begin{aligned} A \backslash B &= \{x : x \in A \wedge x \notin B\} \\ &= \{x : x \in A \wedge x \in B^c\} \end{aligned}$$

olarak gösterilebilir.

Definition 24 *$A = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ ve $B = \{0,\ 1,\ 5,\ 6,\ 7\}$ kümeleri verilsin. Bu durumda*

$$A \backslash B = \{2,\ 3,\ 4\}$$

ve

$$B \backslash A = \{5,\ 6,\ 7\}$$

olur.

Definition 25 *A ve B kümeleri verilsin. $A \cup B$ kümesinin $A \cap B$ kümesinde bulunmayan elemanların kümesine A kümesi ile B kümesinin simetrik farkı denir ve $A \triangle B$ ile gösterilir. Bu tanım simgesel olarak*

$$A \triangle B = \{x : x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B\}$$

ile gösterilir.