1 MATEMATİKSEL MANTIK

Bu bölümde ilk olarak önerne tanımı verilip ispatlarda kullanılan düşünce biçimi incelenecektir.

Tanım 1 *Bir hüküm bildiren ve hakkında doğru veya yanlış denilmesi anlamlı olan ifadelere Önerme denir.*

Bir önerme hem doğru hem de yanlış olamaz veya biraz yanlış biraz doğru da olamaz. O halde bir bilgi vermeyen, bir hüküm bildirmeyen ifadeler önerme değildir. Şimdi aşağıdaki örnekleri inceleyelim.

1. Aksaray İç Anadolu Bölgesindedir.
2. 3+2=6
3. 33<45
4. Eyvah!
5. Dur.
6. Merhaba,

Yukarıdaki örneklerden ilk üçü önerme olmasına karşın geri kalan ifadeler bir bilgi veya hüküm bildirmediğinden önerme değildirler.1. ve 3. önerme doğru olmasına rağmen 2. önerme yanlış bir önermedir.

Önermeleri $p,\ q,\ r,\ s, ...$ gibi küçük harflerle göstereceğiz.

Ayrıca bir önermenin belirttiği hüküm doğru ise D yanlış ise Y simgelerini kullanacağız.

Tanım 2 *Doğruluk değerleri aynı olan önermelere denk veya eşdeğer önermeler denir ve $p \equiv q$ şeklinde gösterilir.*

Örnek 3 P :*Türkiye'nin başkenti Ankaradır. ile* $q : 2+6=8$ *önermeleri doğru olduğundan bu iki önerme denk önermelerdir.*

1.1 Önermeler Cebiri

Bu kısımda önermeler üzerinde ve, veya, değil, ise gibi işlemleri tanımlayıp verilen önermelerden yeni önermeler elde etmeyi öğreneceğiz. Bu işlemlere genel olarak bağlaç ismini vereceğiz. Bağlaçlar ile elde edilen önermelrin doğruluk değerlerini, doğruluk tablosu denilen tablolar yardımıyla göstereceğiz. Bir önermenin doğruluk tablosunu aşağıdaki gibi verebiliriz.

p
D
Y

İki önermenin doğruluk tablosunu,

p	q
D	D
D	Y
Y	D
Y	Y

Üç önermenin doğruluk tablosu ise

p	q	r
D	D	D
D	D	Y
D	Y	D
D	Y	Y
Y	D	D
Y	D	Y
Y	Y	D
Y	Y	Y

şeklinde verilir.

1.1.1 "VE" BAĞLACI

p ve q iki önerme olsun. "p ve q" olarak ifade edilen ve "$p \wedge q$" şeklinde gösterilen yeni önerme p ile q birlikte doğru olduğunda doğru, diğer tüm durumlarda ise yanlış olarak tanımlanan bir önermedir. Bu bileşik önermenin doğruluk tablosu aşağıdaki gibi verilir.

p	q	$p \wedge q$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	Y

1.1.2 "YA DA" BAĞLACI

p ve q iki önerme olsun. "p ya da q" olarak ifade edilen ve "$p \vee q$" şeklinde gösterilen yeni önerme bu önermelerden en az biri doğru ise doğru aksi durumda her iki önermede yanlış ise yanlış olarak tanımlanan bir önermedir. Bu bileşik önermenin doğruluk tablosu aşağıdaki gibi verilir.

p	q	$p \vee q$
D	D	D
D	Y	D
Y	D	D
Y	Y	Y

1.1.3 "DEĞİL" BAĞLACI

Bir p önermesinin doğruluk değeri doğru iken yanlış, yanliş iken de doğru yapılarak elde edilen yeni önermeye p önermesinin değili denir. p önermesinin değili $\sim p$ simgesi ile gösterilir.

p :Pekin, Avrupa kıtasındadır.

p önermesi yanlış bir önerme olup bu önermenin değili olan önerme ise,

$\sim p$:Pekin Avrupa kıtasında değildir.

şeklindedir. $\sim p$ önermesinin doğruluk tablosu ise,

p	$\sim p$
D	Y
Y	D

şeklindedir.

1.1.4 "İSE" BAĞLACI. ya da "GEREKTİRME"

p ve q iki önerme olsun. Eğer p önermesi, q önermesini gerektiriyorsa, bu birleşik önerme "$p \Rightarrow q$" şeklinde gösterilir ve "p ise q" diye okunur. $p \Rightarrow q$ önermesi p nin doğru q nun yanlış olduğu durumda yanlış, diğer durumlarda ise doğrudur. Bu birleşik önermenin doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir.

p	q	$p \Rightarrow q$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	D
Y	Y	D

$p \Rightarrow q$ önermesinde, p ye varsayım, q ya ise sonuç adı verilir. $p \Rightarrow q$ önermesi aşağıdaki ifadelerden biri şeklinde okunur.

"p, q önermesini gerektirir."

"p ise q dur."

"p, q için bir yeter koşuldur."

"q, p için bir gerek koşuldur."

Şimdi "ise" bağlacı ile ilgili örnekler verelim.

Örnek 4 *Doğru önerme doğru önermeyi gerektirir. Örneğin*

$$p : "2 = 2" \text{ ve } q : "10 = 10"$$

ile tanımlanan önermelerin her ikiside doğru önermelerdir. p önermesindeki eşitliğin her iki tarafını 5 ile çarparsak "10 = 10" sonucunu buluruz ki, buda doğru olan q önermesini verir.

Örnek 5 *Doğru önerme yanlış önermeyi gerektirmez.*

$$\begin{aligned} p &: \text{Ankara Türkiyenin Başkentidir.} \\ q &: \text{Türkiye Amerika Kıtasındadır.} \end{aligned}$$

p önermesi varken q önermesinin varlığı sonucuna ulaşılamaz. Yani $(D \Rightarrow Y) \equiv Y$ *dir.*

Örnek 6 *Yanlış önerme doğru önermeyi gerektirebilir.*

$$\begin{array}{lcl} p & : & \textit{Türkiye Amerika Kıtasındadır.} \\ q & : & \textit{Ankara Türkiyenin Başkentidir.} \end{array}$$

p önermesi yanlış olduğu halde q önermesinin yanlış olmasına engel değildir. O halde "Türkiye Amerika Kıtasında⇒Ankara Türkiyenin Başkentidir" gerekirmesi var olabilir.

Örnek 7 *Yanlış önerme, yanlış bir önermeyi gerektirebilir.*

$$p : "2 = 5" \text{ ve } q : "4 = 10"$$

önermelerinin her ikiside yanlış olduğu halde p önermesindeki eşitliğin her iki tarafı 2 ile çarpılırsa q önermesi elde edilir.

$q \Rightarrow p$ önermesine $p \Rightarrow q$ önermesinin karşıtı denir. Bu iki önermenin doğruluk tabloları farklıdır.

1.1.5 "ANCAK VE ANCAK" BAĞLACI VEYA "EŞDEĞERLİLİK"

p ve q iki önerme olmak üzere, $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ birleşik önermesi kısaca "$p \Leftrightarrow q$" ile gösterilir ve "p ancak ve ancak q" yada "p, q önermesine eşdeğerdir diye okunur. Bu birleşik önermenin bir başka okunuşu da "p için gerek ve yeter koşul q önermesidir" şeklindedir. "$p \Leftrightarrow q$" önermesinin doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$
D	D	D	D	D
D	Y	Y	D	Y
Y	D	D	Y	Y
Y	Y	D	D	D

1.1.6 KARMAŞIK DOĞRULUK TABLOLARI

Lemma 8 $(\sim p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$ *dır*

İspat: Doğruluk tablosu yardımıyla gösterelim.

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$(\sim p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$
D	D	Y	D	D	D
D	Y	Y	Y	Y	D
Y	D	D	D	D	D
Y	Y	D	D	D	D

Demek ki "$\sim p \vee q$" için gerek ve yeter koşul"$p \Rightarrow q$" önermesidir.

1.1.7 ÇELİŞMEZ ÖNERMELER (TOTOLOJİLER)

Bir birleşik önerme, kendini oluşturan önermelerin her bir doğruluk değeri için daima doğru oluyorsa bu birleşik önermeye Çelişmez Önerme veya Totoloji denir. Bu önerme daima yanlış oluyorsa da Çelişki denir. Örneğin $(\sim p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$ bir Totolojidir. Aşağıda bazı önemli Totolojileri inceleyelim.

Ara Değerlerin Çıkarılması Kuralı p önermesi ile bu önermenin değili olan $\sim p$ önermesi verildiğinde $\sim p \vee p$ birleşik önermesi bir Totolojidir.

De Morgan Kuralları p ve q iki önerme olsun. Aşağıdaki önermeler Çelişmez Önermelerdir.

a $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$

b $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$

Kontrapozitiflik Kuralı p ve q iki önerme olmak üzere

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q) \Rightarrow (\sim p)$$

birleşik önermesi bir çelişmez önermedir. O halde $(p \Rightarrow q)$ önermesi ile $(\sim q) \Rightarrow (\sim p)$ önermesi eşdeğerdir. $(\sim q) \Rightarrow (\sim p)$ önermesine $(p \Rightarrow q)$ önermesinin Kontrapozitifi denir. Örnek olarak "Bir dizi yakınsak ise limiti tek' dir" gerektirmesinin kontrapozitifi "Dizinin limiti tek değilse dizi yakınsak değildir." gerektirmesidir. O halde bir teoremim kontrapozitifini ispatlamak ile kendisini ispatlamak eşdeğerdir. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q) \Rightarrow (\sim p)$ önermesinin doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q) \Rightarrow (\sim p)$
D	D	Y	Y	D	D	D
D	Y	Y	D	Y	Y	D
Y	D	D	Y	D	D	D
Y	Y	D	D	D	D	D

Dağılma Kuralları p, q ve r önermeler olmak üzere aşağıda dağılma kuralları olarak bilinen önermeler birer Totolojidir.

1. $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
2. $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Ayırma Kuralı $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$ birleşik önermesi bir totoloji olup bu önermeye Ayırma Kuralı denir. Örneğin, "Hava soğuk" ve "Hava soğuk ise bisiklete binmeyeceğim" önermelerini ele alalım. Eğer her iki önermede doğru ise sonuç "bisiklete binmeyeceğim " olacaktır.

Kıyas Kuralı p, q ve r birer önerme olmak üzere

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

çelişmez önermesine Kıyas Kuralı denir. Örneğin, "Hava soğuk ise bisiklete binmem" ve "bisiklete binmem ise evde otururum" gerektirmelerinden "hava soğuk ise evde otururum" sonucu çıkar.

Bir Gerektirmenin Değili $(\sim p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$ Totolojisi ve De Morgan kuralı kullanılırsa

$$\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim (\sim p \vee q) \Leftrightarrow p \wedge (\sim q)$$

elde edilir. O halde bir gerektirmenin değili yeni bir gerektirme olamaz. Örneğin "Hava soğuksa bisiklete binmem" önermesinin değili "Hava soğuk ve bisiklete biniyorum" önermesidir.

Örnek 9 *"Çalışırsam başarırım" önermesinin değilini bulunuz.*

Çözüm 10 *Yukarıda verilen cümleyi iki önermenin bileşkesi şeklinde ifade edelim.*

$$\begin{array}{lcl} p & : & \textit{Çalışırım} \\ q & : & \textit{Başarırım} \end{array}$$

Bu durumda yukarıdaki ifadeyi $p \Longrightarrow q$ *şekinde yazabiliriz.* $\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge (\sim q)$ *olduğundan verilen önermenin değili "Çalışırım ve başaramam" şeklinde olmalıdır.*

1.2 Mantıksal Tartışmalar

Aşağıda vereceğimiz örneklerle matematiksel olmayan bir problemin mantıksal tartışmalar sayesinde matematiksel ispatını vereceğiz.

Örnek 11 *" Ücretler yükselirse alış gücü artar. Eğer bir bunalım varsa ücretler yükselmez." ifadesi veriliyor. Buna göre aşağıdaki sonuçlardan hangilerin doğru olduğunu mantıksal tartışma yaparak gösteriniz.*

a Ücretler yükselirse bunalım olmaz.

b Bir bunalım varsa alışgücü artmaz.

c Alışgücünün artması için bir yeter koşul ücretlerin artmasıdır.

d Ya bunalım yoktur ya da ücretler yükselmez.

Çözüm 12 *İlk olarak paragrafı sembolik olarak ifade edelim.*
p : *Ücretler yükselir*
q : *Alış gücü artar*
r : *Bunalım var.*
Bu önermeler yardımıyla paragrafı
1) $p \Longrightarrow q$
2) $r \Longrightarrow \sim p$
şeklinde yazabiliriz.

a Sonucu $p \Longrightarrow \sim r$ önermesi ile ifade edebiliriz. 2) nin doğruluğunu biliyoruz o halde 2) önermesinin kontrapozitifi alınırsa

$$(p \Longrightarrow \sim r) \Leftrightarrow (r \Longrightarrow \sim p)$$

olacağından $p \Longrightarrow \sim r$ önermesi doğrudur.

b Sonucu $r \Longrightarrow \sim q$ önermesi ile ifade edebiliriz. $r \Longrightarrow \sim q$ önermesinin yanlış olması için r önermesinin doğru $\sim q$ önermesinin yanlış dolayısıyla q önermesinin de doğru olması gerekir. Bu ise 1) ve 2) ile çelişmeyen bir örnek olup $r \Longrightarrow \sim q$ önermesinin her zaman doğru olmayacağını gösterir. O halde b sonucu yanlıştır.

c Sonucu $p \Longrightarrow q$ önermesi ile ifade edebilriz. Bun ise 1) den doğru bir önermedir.

d Sonucu $\sim r \vee \sim p$ önermesi ile ifade edebilriz.

$$\sim r \vee \sim p \Leftrightarrow r \Longrightarrow \sim p$$

olduğundan ve 2) önermesi doğru olduğundan d sonucu doğrudur.

Örnek 13 *" Ahmet Fizik Bölümünde ise Matematik çalışmalıdır. Matematik çalışır ise mantıklı düşünmelidir. Ahmet Matematik çalışıyor." paragrafı veriliyor. Buna göre aşağıdaki sonuçlardan hangilerin doğru olduğunu mantıksal tartışma yaparak gösteriniz.*

a Ahmet Fizik Bölümündedir.

b Ahmet ya mantıklı düşünmeli ya da Fizik Bölümünde değildir.

c Ahmet mantıklı düşünür.

d Ahmetin mantıklı çalışması için yeter koşul Fizik Bölümünde olmasıdır.

e Ahmet Fizik Bölümünde ise mantıklı düşünmelidir.

Çözüm 14 *İlk olarak paragrafı sembolik olarak ifade edelim.*
p : *Ahmet Fizik Bölümündedir*
q : *Matematik çalışmalıdır*
r : *Mantıklı düşünmelidir*

Bu önermeler yardımıyla paragrafı
1) $p \Longrightarrow q$
2) $q \Longrightarrow r$
3) q
şeklinde yazabiliriz.

a Sonucu p önermesi ile ifade edebiliriz. Bunu göstermek için aksine örnek verelim. p yanlış olsun. q doğru olduğundan1), 2) ve 3) sağlanır. O halde a sonucu yanlıştır.

b Sonucu $r \vee \sim p$ önermesi ile ifade edebiliriz. 1) ve 2) den kıyas kuralı kullanılırsa

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

elde edilir. Buradan

$$(p \Rightarrow r) \Leftrightarrow (\sim p \vee r) \Leftrightarrow (r \vee \sim p)$$

olup b sonucu doğrudur.

c Sonucu r önermesi ile ifade edebiliriz. 2) ve 3) den ayırma kuralı uygulanırsa

$$[q \wedge (q \Longrightarrow r)] \Longrightarrow r$$

elde edilir. Yani c sonucu doğrudur.

d Sonucu $p \Longrightarrow q$ önermesi ile ifade edebiliriz. Bu ise d sonucunun 1) den doğru olduğunu gösterir.

e Sonucu $p \Longrightarrow r$ önermesi ile ifade edebiliriz. 1) ve 2) den kıyas kuralı kullanılırsa

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

elde edilir. Bu ise e sonucunun doğru olduğunu gösterir.