0.1 SAYISAL BELİRTEÇLER

Günlük hayatta "her", "bütün", "bazı", "bir tek", "en azbir", "yalnız ve yalnız bir" gibi belirteçleri içeren cümleleri kullanmaktayız. Bu kısımda içinde belirteçler bulunan cümleleri simgeler kullanarak kısa olarak tanıtmak ve bunları önermeler cebirinde kullanabilmektir.

Tanım 1 *Bir ya da daha çok değişken içeren ve bu değişkenler yerine belirli bir topluluğun elemanları konulduğunda bir önerme haline dönüşen ifadelere Formül denir.*
$\mathbb{Z}$ tam sayıları göstermek üzere $x + 4 < 7,\ x \in \mathbb{Z}$ bir formüldür.

Tanım 2 *Bir A kümesi verilsin. A kümesinin her x öğesine karşılık doğru ya da yanlış olabilen $p(x)$ ile gösterilen bir önerme elde edilebiliyorsa, $p(x)$ ifadesine Açık Önerme denir.*

Örnek 3 *$A = \{-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1\}$ kümesi verilsin.*

$$p(x) : "x + 2 > 0"$$

şeklinde tanımlanan p Açık bir önermedir.

Tanım 4 *A kümesi üzerinde tanımlanan bir p önerme fonksiyonu için A kümesinin her x öğesi için $p(x)$ doğru bir önerme oluyorsa bu durumu*

$$\forall x,\ p(x)$$
$$\forall x \in A,\ p(x)$$

sembollerinden biriyle gösterecek ve "her $x \in A$ için $p(x)$ doğrudur" diye okuyacağız. Burada $\forall$ sembolü evrensel belirteç olup "her" diye okunur.

Örnek 5 *"Her $x \in \mathbb{Z}$ için $5 - x^2 \leq 15$" ifadesi verilsin.*

$$p(x) :\ 5 - x^2 \leq 15$$

olmak üzere yukarıdaki ifadeyi evrensel belirteç yardımıyla

$$\forall x \in \mathbb{Z},\ p(x) :\ 5 - x^2 \leq 15$$

şeklinde sembolik olarak ifade edebiliriz.

Tanım 6 *A kümesi üzerinde tanımlanan bir p önerme fonksiyonu A kümesinin bazı (dolayısıyla en az bir) x elemanları için doğru oluyorsa bu durumu*

$$\exists x,\ p(x)$$
$$\exists x \in A, \ni\ p(x)$$

sembollerinden biriyle gösterecek ve "bazı $x \in A$ için $p(x)$ doğrudur" veya " bir $x \in A$ vardır öyle ki $p(x)$ doğrudur" şeklinde okuyacağız. Burada kullanılan $\exists$ sembolüne Varlık Belirteçi denir ve "vardır" ya da "en az bir" diye okunur.
Burada kullandığımız "$\ni$" sembolü öyle ki diye okunur ve bir önerme için gerekli olan temel öğelerden birisi değildir.

Örnek 7 *"Bazı $x \in \mathbb{Z}$ için $x^2 + 1 \leq 5$" ifadesi verilsin. Varlık belirteçi yardımıyla bu önermeyi sembolik olarak*

$$\exists x \in \mathbb{Z},\ p(x) : x^2 + 1 \leq 5$$

şeklinde yazabiliriz. $x^2 + 1 \leq 5$ *eşitsizliğin çözüm kümesi*

$$Ç = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$$

olup bazı $x \in \mathbb{Z}$ elemanları için p önermesinin doğru olduğunu gösterir.

Uyarı 8 *n değişkenli bir formülü önermeye dönüştürebilmek için n tane sayısal belirteç kullanılmalıdır.*

Örnek 9 *"Her $x \in A$ ve en az bir $y \in A$ için $x + 5 < y$" iki değişkenli bir önermedir. Dikkat edilecek olunursa iki tane sayısal belirteç kullanılmıştır.*

0.1.1 Belirteçlerin Değilleri

Sayısal belirteçlerin değilleri elde edilmesi daha sonra verilecek olan Analiz ve Reel Analiz gibi derslerde oldukça önem kazanacaktır. Bu yüzden önermelerin değilleri bulunurken oldukça özen gösterilmelidir.

I kümesi tüm ağaçaların kümesini ve

$$p(x) :\ x \text{ yeşildir}$$

önermesi verilsin. Buna göre "Her ağaç yeşildir" önermesini

$$\forall x \in I,\ p(x)$$

şeklinde ifade edebiliriz. Bu önermenin değili yani

$$\sim [\forall x \in I,\ p(x)]$$

önermesini "Yeşil olmayan ağaç vardır" , "Bazı ağaçlar yeşil değildir" veya "En az bir yeşil omayan ağaç vardır." şeklinde ifade edebiliriz. Simgesel olrak ise bu önerme

$$\exists x \in I \ni \sim p(x)$$

ile verilir.

Şimdi daha karöaşık bir örnek verelim. "Bütün köpekler bazı insanları ısırır." önermesini ele alalım. Köpekler kümesini K ve insanlar kümesini de I ile gösterelim. Ayrıca $p(x, y)$: "x y yi ısırır" şeklinde ifade edilmek üzere yukarıdaki önermeyi,

$$\forall x \in K \text{ için } \exists y \in I \text{ vardır } \ni\ p(x, y)$$

ile ifade edebiliriz. Bu önermenin değili ise "Bütün insanları ısırmayan en az bir köpek vardır." olup sembolik olarak

$$\sim [\forall x \in K \text{ için } \exists y \in I \text{ vardır } \ni\ p(x, y)] \equiv \exists x \in K\ \ni\ \forall y \in I \text{ için } \sim p(x, y)$$

önermesidir.

0.1.2 Belirteç İçeren Mantıksal Sonuçlar

Aşağıdaki önermeler, $p(x)$, $q(x)$, $r(x,y)$ formülleri ne olursa olsun daima doğru olan önermelerdir.

1. $\sim [\exists x,\ p(x)] \Leftrightarrow \forall x,\ \sim p(x)$,
2. $\sim [\forall x,\ p(x)] \Leftrightarrow \exists x,\ \sim p(x)$,
3. $\forall x,\ p(x) \Longrightarrow \exists x,\ p(x)$,
4. $\sim [\forall x, \forall y,\ r(x,y)] \Leftrightarrow [\exists x, \exists y,\ \sim r(x,y)]$,
5. $\sim [\forall x, \exists y,\ r(x,y)] \Leftrightarrow [\exists x, \forall y,\ \sim r(x,y)]$,
6. $\sim [\exists x, \forall y,\ r(x,y)] \Leftrightarrow [\forall x, \exists y,\ \sim r(x,y)]$,
7. $\sim [\exists x, \exists y, r(x,y)] \Leftrightarrow [\forall x, \forall y,\ \sim r(x,y)]$,
8. $[\exists x, \forall y, r(x,y)] \Longrightarrow [\forall y,\ \exists x,\ r(x,y)]$,
9. $\forall x\, [p(x) \wedge q(x)] \Leftrightarrow \forall x\ p(x) \wedge \forall x\ q(x)$,
10. $\exists x\, [p(x) \vee q(x)] \Leftrightarrow \exists x\ p(x) \vee \exists x\ q(x)$.