Birinci Basamaktan Diferensiyel Denklemlerin Uygulamaları

1. Yörüngeler

$$F(x, y, c) = 0 \tag{1}$$

$xy-$ düzleminde verilen bir parametreli eğri ailesini göstersin.

Tanım 1. (1) ile verilen eğri ailesini dik açı altında kesen eğri ailesine (1) in dik yörüngeleridir denir.

(1) in dik yörüngelerini bulmak için ilk olarak (1) denkleminin her iki yanının diferensiyeli hesaplanır ve c parametresinin içerilmediği

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{2}$$

diferensiyel denklemi elde edilir. (1) in dik yörüngeleri

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x, y)} \tag{3}$$

diferensiyel denkleminin bir parametreli çözümü olan

$$G(x, y, k) = 0$$

eğri ailesidir.

Tanım 2. (1) ile verilen eğri ailesini $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ açısı altında kesen eğri ailesine (1) in eğik yörüngeleridir denir.

(1) in eğik yörüngeleri $f(x, y)$ fonksiyonu (2) de belirlendiği gibi olmak üzere

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y) + \tan\alpha}{1 - f(x, y)\tan\alpha} \tag{4}$$

diferensiyel denkleminin bir parametreli çözüm ailesidir.

Örnek 1. $y = cx^2$ parabol ailesinin dik yörüngelerini bulunuz, burada c keyfi sabittir.

Çözüm. Verilen denklemin her iki yanının diferensiyeli alınıp, elde edilen diferensiyel denklemde $c = \frac{y}{x^2}$ olduğu ve (3) eşitliği dikkate alınırsa, aranan eğri ailesinin diferensiyel denklemi

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y} \tag{5}$$

bulunur. (5) diferensiyel denklemi değişkenlerine ayrılabilen bir denklem olup integre edildiğinde verilen ailenin dik yörüngeleri

$$2y^2 + x^2 = c^2$$

olarak bulunur.

Örnek 2. $x^2 + y^2 = c^2$ çemberler ailesini $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ açısı altında kesen eğik yörünge ailesini bulunuz, burada c keyfi sabittir.

Çözüm. Verilen eğri ailesinin her iki yanının diferensiyeli alınırsa

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

diferensiyel denklemi elde edilir. O halde $f(x, y) = -\dfrac{x}{y}$ olup (4) eşitliği göz önüne alınırsa aranan eğri ailesinin diferensiyel denklemi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{y + x} \tag{6}$$

elde edilir. (6) denklemi bir homogen diferensiyel denklem olup $y = xv,\ v = v(x)$ değişken değiştirmesi yapılıp çözüldüğünde aranan eğik yörünge ailesi

$$\ln c^2(x^2 + y^2) + 2 \arctan \frac{y}{x} = 0$$

olarak bulunur.

2. Artma ve Azalma Problemleri

$N(t)$ artan veya azalan madde miktarını (veya nüfusu) göstersin. Madde miktarının zamanla değişim hızının mevcut madde miktarı ile orantılı olduğu kabul edilirse,

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

diferensiyel denklemi elde edilir, burada k orantı sabitidir.

Örnek 1. Bir radyoaktif maddenin miktarı ile orantılı bir hızla yok olduğu bilinmektedir. 150 yıl sonunda madde miktarının yarısının yok olduğu gözlemlendiğine göre

(a) 450 yıl sonunda madde miktarının yüzde kaçı kalır?

(b) Kaç yıl sonra başlangıçtaki miktarının %10 u kalır?

Çözüm. $N(t)$ herhangi bir t anındaki madde miktarını, N_0 başlangıçtaki madde miktarını göstersin. Bu durumda

$$\frac{dN}{dt} = kN \tag{1}$$

diferensiyel denklemi elde edilir, burada $k < 0$ orantı sabitidir. (1) diferensiyel denklemi değişkenlerine ayrılabilen bir denklem olup integre edilirse

$$N(t) = ce^{kt} \tag{2}$$

genel çözümü bulunur, burada c integral sabitidir. $N(0) = N_0$ başlangıç koşulu uygulanırsa (2) den

$$N(t) = N_0 e^{kt} \tag{3}$$

bulunur. k orantı sabitini belirlemek için $N(150) = \frac{1}{2}N_0$ koşulu (3) denkleminde göz önüne alındığında $k = \frac{1}{150}\ln\frac{1}{2}$ ve buradan

$$N(t) = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{150}} \tag{4}$$

elde edilir

(a) (4) den $N(450) = N_0\left(\frac{1}{2}\right)^3$ olup 450 yıl sonunda başlangıçtaki madde miktarının %12.5 i kalır.

(b) $N(t_1) = \dfrac{1}{10}N_0$ olacak şekildeki t_1 yılını arıyoruz. (4) den elde edilen

$$\frac{1}{10}N_0 = N_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_1}{150}}$$

denklem çözüldüğünde

$$t_1 = 150\frac{\ln 10}{\ln 2}$$

elde edilir.

Örnek 2. Bir kültürdeki bakteri miktarı ile orantılı bir hızla artmaktadır. Başlangıçta 30 bakteri lifi vardır ve iki saat sonra bu sayı %20 artmıştır.

(a) Herhangi bir t anında kültürdeki yaklaşık lif sayısını bulunuz.

(b) Bakteri miktarının başlangıçtakinin iki katına çıkması için gereken zamanı bulunuz.

Çözüm. $N(t)$ herhangi bir t anında kültürdeki bakteri miktarını göstersin. Bu durumda

$$\frac{dN}{dt} = kN \tag{5}$$

diferensiyel denklemi elde edilir, burada $k > 0$ orantı sabitidir. (5) diferensiyel denkleminin genel çözümü

$$N(t) = ce^{kt} \tag{6}$$

olup, $N(0) = 30$ ve $N(2) = 36$ olduğuna dikkat edilmelidir.

(a) (6) çözümünde $N(0) = 30$ olduğu göz önüne alınırsa

$$N(t) = 30e^{kt}$$

bulunur. k orantı sabitini belirlemek için $N(2) = 36$ koşulu göz önüne alınırsa, $k = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{6}{5}$ ve herhangi bir t anındaki yaklaşık lif sayısı

$$N(t) = 30\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{t}{2}} \tag{7}$$

bulunur.

(*b*) $N(t_1) = 60$ olacak şekildeki t_1 belirlenmelidir. (7) den elde edilen

$$60 = 30 \left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{t_1}{2}}$$

denklemi çözüldüğünde $t_1 = \dfrac{\ln 4}{\ln 1.2}$ bulunur.

3. Sıcaklık Problemleri

$T(t)$ bir cismin sıcaklığını, T_m de cismi çevreleyen ortamın sıcaklığını göstersin. Bu durumda Newton'un soğuma yasasına göre cismin sıcaklığının zamanla değişim hızı

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m) \tag{1}$$

veya

$$\frac{dT}{dt} + kT = kT_m \tag{2}$$

diferensiyel denklemi ile ifade edilir, burada k pozitif orantı sabitidir. (1) ya da eşdeğer olan (2) diferensiyel denkleminin $T > T_m$ durumunda soğuma problemini, $T < T_m$ durumunda ise ısınma problemini ifade ettiğine dikkat edilmelidir.

Örnek 1.80 $°F$ sıcaklıktaki bir cisim 50 $°F$ sabit sıcaklıkta tutulan bir odaya yerleştiriliyor. 5 dakika sonra cismin sıcaklığı 70 $°F$ ye düştüğüne göre

(a) 10 dakika sonra cismin sıcaklığı kaç $°F$ olur?

(b) Yaklaşık olarak kaç dakika sonra cismin sıcaklığı 60 $°F$ olur?

Çözüm. $T(t)$ herhangi bir t anında cismin sıcaklığını, T_m de ortamın sıcaklığını göstermek üzere verilen problemin diferensiyel denklemi

$$\frac{dT}{dt} + kT = 50k \tag{3}$$

ve koşullar $T(0) = 80$, $T(5) = 70$ şeklindedir. (3) diferensiyel denklemi değişkenlerine ayrılabilen bir denklem olup integre edilirse

$$T(t) = 50 + ce-^{kt} \tag{4}$$

genel çözümü bulunur, burada c integral sabitidir. $T(0) = 80$ koşulu uygulanırsa (4) den

$$T(t) = 50 + 30e-^{kt} \tag{5}$$

bulunur. k orantı sabitini belirlemek için $T(5) = 70$ koşulu (5) denkleminde göz önüne alındığında $e^{-k} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{5}}$ ve buradan

$$T(t) = 50 + 30\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{5}} \tag{6}$$

elde edilir

(a) (6) dan $T(10) = 50 + 30\left(\frac{2}{3}\right)^2$ olup 10 dakika sonra cismin sıcaklığı yaklaşık olarak 63 $°F$ olur.

(b) $T(t_1) = 60$ olacak şekildeki t_1 değerini arıyoruz. (6) dan elde edilen

$$60 = 50 + 30\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t_1}{5}}$$

denklem çözüldüğünde

$$t_1 = 5\frac{\ln\frac{1}{3}}{\ln\frac{2}{3}}$$

elde edilir.

Örnek 2. Bilinmeyen sıcaklıktaki bir cisim 0 $°F$ sabit sıcaklıktaki bir buzdolabına yerleştiriliyor. 20 dakika sonra cismin sıcaklığı 40 $°F$ ve 40 dakika sonra 20 $°F$ ise cismin başlangıçtaki sıcaklığını bulunuz.

Çözüm. $T(t)$ herhangi bir t anında cismin sıcaklığını göstersin. $T_m = 0$ olduğundan verilen problemin diferensiyel denklemi

$$\frac{dT}{dt} = -kT \tag{7}$$

şeklindedir, burada $k > 0$ orantı sabitidir. (7) diferensiyel denklemi integre edilirse

$$T(t) = ce^{-kt} \tag{8}$$

genel çözümü elde edilir. $T(20) = 40$ ve $T(40) = 20$ koşulları (8) de göz önüne alındığında

$$T(t) = 40(2)^{\frac{20-t}{20}}$$

bulunur. O halde $T(0) = 80$ $°F$ dir.

4. Elektrik Devreleri

Kirchhoff Voltaj Yasası: Kapalı bir elektrik devresinde direnç, indüktör ve kapasitörler (sığaç) üzerindeki voltaj düşmelerinin toplamı devredeki toplam elektromotor kuvvete eşittir.

Bu sonuca göre R : direnç (ohm), C : sığaç (farad), L : indüktör (henry), E : elektromotor kuvvet (volt), I : akım (amper), q : yük (coulomb) olmak üzere iki basit elektrik devresi modeli ele alınacaktır. Yük ve akım arasında $I = \dfrac{dq}{dt}$ bağıntısı olduğuna dikkat edilmelidir.

(i) Bir direnç, bir indüktör ve bir elektromotor kuvvetten oluşan bir RL devresinde Kirchhoff voltaj yasası göz önüne alındiğinda aşağıdaki diferensiyel denklem elde edilir.

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{E}{L} \tag{1}$$

(ii) Bir direnç, bir sığaç ve bir elektromotor kuvvetten oluşan bir RC devresinde Kirchhoff voltaj yasası göz önüne alındiğinda ise,

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = \frac{E}{R} \tag{2}$$

diferensiyel denklemi elde edilir.

Örnek 1. Bir RL devresinde elektromotor kuvvet $E = 100\sin 40t$ ile verilmektedir. Devredeki direnç 10 ohm, indüktör 0.5 henry ve ilk akım 0 olduğuna göre, herhangi bir t anında devreden geçen akımı bulunuz.

Çözüm. Verilen problem için (1) diferensiyel denklemi göz önüne alınırsa

$$(0.5)\frac{dI}{dt} + 10I = 100\sin 40t \tag{3}$$

yazılabilir. (3) diferensiyel denklemi 1. basamaktan lineer bir denklem olup genel çözümü

$$I(t) = 2(\sin 40t - 2\cos 40t) + ce^{-20t} \tag{4}$$

dir, burada c integral sabitidir. $I(0) = 0$ başlangıç koşulu (4) genel çözümünde göz önüne alınırsa, herhangi bir t anında devredeki akım

$$I(t) = 2(\sin 40t - 2\cos 40t) + 4e^{-20t}$$

olarak bulunur.

Örnek 2. Bir RC devresinde elektromotor kuvvet 100 volt, direnç 5 ohm, sığaç 0.02 farad ve sığaç üzerindeki yük 5 coulomb ile verilmektedir.

(a) Herhangi bir t anında sığaç üzerindeki yükü bulunuz.

(b) Herhangi bir t anında devredeki akımı bulunuz.

Çözüm. Verilen problem için (2) diferensiyel denklemi göz önüne alınırsa

$$\frac{dq}{dt} + 10q = 20 \tag{5}$$

yazılır.

(a) (5) diferensiyel denklemi integre edilirse

$$q(t) = 2 + ce^{-10t} \tag{6}$$

elde edilir, burada c integral sabitidir. $q(0) = 5$ başlangıç koşulu (6) da göz önüne alınırsa

$$q(t) = 2 + 3e^{-10t} \tag{7}$$

elde edilir.

(b) $I = \dfrac{dq}{dt}$ bağıntısı göz önüne alınırsa (7) den

$$I(t) = -30e^{-10t}$$

bulunur.