Birinci Basamaktan Yüksek Dereceden Lineer Olmayan Denklemler

1) Çarpanlarına Ayrılabilir Denklemler

Bu türden denklemler y' ne göre çözülebilen denklemler olup, $y' = p$ alınarak denklem çarpanlarına ayrılır ve çözülür.

Örnek: $(y')^3 + y\,(y')^2 - x^2y^2y' - x^2y^3 = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm. $y' = p$ olsun. Buradan,

$$p^3 + yp^2 - x^2y^2p - x^2y^3 = (p - xy)(p + xy)(p + y) = 0$$

şeklinde çarpanlarına ayrılır.

$$\begin{aligned} p + y &= 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -y \Rightarrow ye^x = c \\ p - xy &= 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = xy \Rightarrow y = ce^{x^2/2} \\ p + xy &= 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -xy \Rightarrow y = ce^{-x^2/2} \end{aligned}$$

olup, genel çözüm

$$(ye^x + c)\left(y + ce^{x^2/2}\right)\left(y + ce^{-x^2/2}\right) = 0$$

olur.

Örnek: $(y')^2 - (2x + y)\,y' + x^2 + xy = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm. $y' = p$ olmak üzere verilen denklem,

$$(p)^2 - (2x + y)\,p + x^2 + xy = (p - x)(p - x - y) = 0$$

şeklinde çarpanlarına ayrılır. Buradan

$$\begin{aligned} p - x &= 0 \Rightarrow y = \frac{x^2}{2} + c \\ p - x - y &= 0 \Rightarrow y = -x - 1 + ce^x \end{aligned}$$

olup, çözüm

$$\left(y - \frac{x^2}{2} + c\right)(y + x + 1 + ce^x) = 0.$$

2) $F(y') = 0$ **Şeklindeki Denklemler**

Bu türden denklemlerin çözümleri $F\left(\frac{y-c}{x}\right) = 0$ şeklinde doğrudan yazılır.

Örnek: $(y')^2 - y' + 6 = 0$ denkleminin çözümü

$$\left(\frac{y-c}{x}\right)^2 - \left(\frac{y-c}{x}\right) + 6 = 0$$

şeklinde doğrudan yazılır.

3) $F(x, y') = 0$ **Şeklindeki Denklemler**

$F(x, y') = 0$ denklemini y' ne göre çözmek zor olduğu zaman, bu denklemi bir t parametresi yardımıyla parametrik olarak ifade edebiliriz.

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y' = \psi(t) \end{cases}$$

olmak üzere denklemin çözümü parametrik olarak

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \int \psi(t)\, \varphi'(t)\, dt \end{cases}$$

şeklinde olur.
Örnek:

$$x = y'^2 - 2y' + 2$$

denklemini çözünüz.
Çözüm. $y' = t$ olsun. Bu durumda

$$x = t^2 - 2t + 2$$

olup, buradan

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} \Rightarrow dy = y' dx \Rightarrow dy = t(2t-2)\, dt \\ &\Rightarrow \quad y = \frac{2}{3}t^3 - t^2 + c. \end{aligned}$$

Böylece parametrik formdaki çözüm

$$\begin{cases} x = t^2 - 2t + 2 \\ y = \frac{2}{3}t^3 - t^2 + c \end{cases}$$

olur.
Örnek: $x = \ln y' + \sin y'$ denklemini çözünüz.
Çözüm. $y' = t$ olsun. Bu durumda $x = \ln t + \sin t$ olup, buradan

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} \Rightarrow dy = y' dx \Rightarrow dy = (1 + t\cos t)\, dt \\ &\Rightarrow \quad y = t + t\sin t + \cos t + c \end{aligned}$$

olur, böylece parametrik formdaki çözüm

$$\begin{cases} x = \ln t + \sin t \\ y = t + t\sin t + \cos t + c. \end{cases}$$