Clairaut Denklemi

Clairaut denklemi $y^{'} = p$ olmak üzere

$$y = xp + f(p)$$

şeklindedir. Her iki tarafın x e göre türevi alınırsa

$$\left(x + f^{'}(p)\right) \frac{dp}{dx} = 0$$

elde edilir.

(i) $\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c$ denklemde yerine yazılırsa

$$y = cx + f(c)$$

denklemin bir parametreli çözümüdür.

(ii)

$$\begin{cases} x + f^{'}(p) = 0 \\ y = xp + f(p) \end{cases}$$

arasından p yok edilerek aykırı çözüm bulunur.

Lagrange Denklemi

Lagrange denklemi

$$y = xf(p) + g(p)$$

şeklindedir. Her iki tarafın x e göre türevi alınırsa

$$(p - f(p)) = \left(xf^{'}(p) + g^{'}(p)\right) \frac{dp}{dx} \tag{1}$$

elde edilir.

(i) $p - f(p) = 0$ eşitliğinden varsa reel kökler bulunur ve denklemde yerine yazılarak Lagrange denkleminin aykırı çözümü bulunur.

(ii) (1) denkleminde x ile p nin rolleri değiştirilerek x bağımlı, p bağımsız lineer denklem elde edilir. Bu lineer denklemin çözümleri ile verilen denklem arasından p yok edilirse denklemin parametrik formdaki çözümleri elde edilir.

Örnek 1:

$$y = xy^{'} + \left(y^{'}\right)^2$$

diferensiyel denkleminin çözümlerini bulunuz.

Çözüm: $y^{'} = p$ olmak üzere verilen denklem Clairaut denklemidir. Her iki tarafın x e göre türevi alınırsa

$$(x + 2p) \frac{dp}{dx} = 0$$

olur.

(i) $\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c$ denklemde yerine yazılırsa

$$y = cx + c^2$$

bir parametreli çözümü elde edilir.

(ii) $x + 2p = 0 \Rightarrow p = -\frac{x}{2}$ olup yerine yazılırsa

$$y = -\frac{x^2}{4}$$

aykırı çözümü elde edilir.

Örnek 2:

$$y = xy^{'} + \frac{a}{(y^{'})^2}$$

diferensiyel denkleminin çözümlerini bulunuz.

Örnek 3:

$$y = x\left(p^2 + 2p\right) - \left(p^2 + 2p - 1\right)$$

diferensiyel denkleminin çözümlerini bulunuz.

Çözüm: Verilen denklem Lagrange denklemidir. Her iki tarafın x e göre türevi alınırsa

$$p\left(-1 - p\right) = \left(p + 1\right)\left(2x - 2\right)\frac{dp}{dx}$$

olur.

(i) $p = 0,\ \ p = -1$ olup karşılık gelen aykırı çözümler sırasıyla $y = -1$ ve $y = -x + 2$ şeklindedir.

(ii)

$$p\left(-1 - p\right) = \left(p + 1\right)\left(2x - 2\right)\frac{dp}{dx}$$

denkleminde x ile p nin rolleri değiştirilirse

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = \frac{2}{p}$$

lineer diferenesiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü

$$x = 1 + cp^{-2}$$

şeklindedir. O halde, verilen Lagrange denkleminin parametrik formdaki çözümü

$$\begin{cases} x = 1 + cp^{-2} \\ y = x\left(p^2 + 2p\right) - \left(p^2 + 2p - 1\right) \end{cases}$$

arasından p yok edilerek bulunur.

x e Göre Çözülebilen Denklemler

$F\left(x, y, y^{'}\right) = 0$ şeklindeki bir denklem $y^{'} = p$ olmak üzere

$$x = g\left(y, p\right)$$

formuna getirildikten sonra y ye göre türev alınarak çözüme gidilir.

Örnek 4:

$$e^{p-x} = p^2 - 1$$

diferensiyel denkleminin çözümlerini bulunuz.

Çözüm: Verilen denklemin her iki tarafının logaritması alınırsa

$$x = p - \ln\left(p^2 - 1\right)$$

elde edilir. Her iki tarafın y ye göre türevi alınırsa

$$\frac{1}{p} = \left(1 - \frac{2p}{p^2 - 1}\right)\frac{dp}{dy}$$

sonucuna varılır. Bu denklem bir değişkenlerine ayrılabilen denklem olup çözümü

$$y = \frac{p^2}{2} - 2p + \ln\left(\frac{p+1}{p-1}\right) + c$$

olarak bulunur. O halde, verilen denklemin parametrik formdaki çözümü

$$\left\{\begin{array}{c} x = p - \ln\left(p^2 - 1\right) \\ y = \frac{p^2}{2} - 2p + \ln\left(\frac{p+1}{p-1}\right) + c \end{array}\right.$$

arasından p yok edilerek bulunur.