Yüksek Basamaktan Lineer Diferensiyel Denklemler

Temel Teori

Tanım: x bağımsız y bağımlı değişken olmak üzere n-inci basamaktan lineer diferensiyel denklem

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = F(x) \qquad (1)$$

ile verilir. Burada a_0 katsayısı aşikar olarak sıfır olamaz. Ayrıca, $a_0, ..., a_n$ katsayıları ve F fonksiyonu $a \leq x \leq b$ aralığı üzerinde tanımlı sürekli reel fonksiyonlar olduğu kabul edilmektedir. Lineer diferensiyel operatör cinsinden (1) denklemi

$$L(D) = a_0(x)D^n + a_1(x)D^{n-1} + ... + a_{n-1}(x)D + a_n(x)$$

olmak üzere

$$L(D)y = F(x)$$

şeklinde yazılabilir. $F(x)$ fonksiyonuna homogen olmayan terim denir. $F(x) = 0$ ise bu durumda (1) denklemi

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = 0 \qquad (2)$$

denklemine indirgenir. (2) denklemine (1) denklemine karşılık gelen homogen denklem denir.

Örnek:

$$y'' + 3xy' + x^3 y = e^x$$

ikinci basamaktan değişken katsayılı homogen olmayan lineer bir diferensiyel denklemdir.

Tanım: $f_1, ..., f_m$ m tane fonksiyon ve $c_1, ..., c_m$ m tane sabit olsun. Bu durumda $c_1 f_1 + ... + c_m f_m$ ifadesine $f_1, ..., f_m$ fonksiyonlarının lineer kombinasyonu denir.

Teorem: Lineer homogen (2) diferensiyel denkleminin çözümlerinin herhangi bir lineer kombinasyonu da (2) denkleminin bir çözümüdür.

Örnek: $\sin x$ ve $\cos x$ fonksiyonları

$$y'' + y = 0$$

denkleminin çözümleri olduğu gösterilebilir. Teoremden bunların lineer kombinasyonu olan

$$c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

de denklemi sağlar. Örneğin $5\cos x + 6\sin x$ bir çözümdür.

Tanım: Bir I aralığında tanımlı $f_1, ..., f_n$ fonksiyonları en az bir $c_j \neq 0$ $j = 0, 1, ..., n$ için

$$c_1 f_1 + ... + c_n f_n = 0 \qquad (3)$$

koşulunu sağlıyorsa, bu durumda bu fonksiyonlar I aralığı üzerinde lineer bağımlıdır denir. Eğer (3) denklemi ancak

$$c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$$

olması durumunda sağlanıyorsa, $f_1, ..., f_n$ I aralığı üzerinde lineer bağımsızdır denir.

Örnek: $f_1(x) = \sin x$, $f(x) = -\sin x$ ve $f_3(x) = 3\sin x$ fonksiyonları lineer bağımlıdır. Çünkü

$$c_1 \sin x + c_2(-\sin x) + c_3(3\sin x) = 0$$

olabilmesi için $c_1 = 1$, $c_2 = 4$, $c_3 = 1$ alınır.

Örnek: $f_1(x) = x$, $f(x) = x^2$ fonksiyonları lineer bağımsızdır. Çünkü

$$c_1 x + c_2 x^2 = 0$$

olabilmesi ancak

$$c_1 = c_2 = 0$$

ile mümkündür.

Tanım: $f_1, ..., f_n$ fonksiyonları bir $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı reel değerli, $(n-1)$ kez türevlenebilir fonksiyonlar olsun.

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1^{'} & f_2^{'} & \cdots & f_n^{'} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

determinantına $f_1, ..., f_n$ fonksiyonlarının Wronskiyeni denir ve $W(f_1, ..., f_n)(x)$ ile gösterilir.

Teorem: (2) denkleminin $f_1, ..., f_n$ çözümlerinin $[a, b]$ aralığı üzerinde lineer bağımlı olması için gerek ve yeter koşul

$$W(f_1, ..., f_n)(x) = 0 \quad , \quad x \in [a, b]$$

olmasıdır.

Sonuç: (2) denkleminin $f_1, ..., f_n$ çözümlerinin $[a, b]$ aralığı üzerinde lineer bağımsız olması için gerek ve yeter koşul

$$W(f_1, ..., f_n)(x) \neq 0 \quad , \quad x \in [a, b]$$

olmasıdır.

Tanım: $f_1, ..., f_n$ fonksiyonları n-inci basamaktan lineer homogen (2) diferensiyel denkleminin lineer bağımsız çözümleri ise, bu durumda $\{f_1, ..., f_n\}$ kümesine (2) denkleminin temel çözümler kümesi denir.

$$f(x) = c_1 f_1 x + ... + c_n f_n(x)$$

fonksiyonuna da (2) denkleminin genel çözümü denir. Burada $c_1, ..., c_n$ ler keyfi sabitlerdir.

Örnek:

$$y''' - 6y'' + 5y' + 12y = 0$$

diferensiyel denkleminin çözümü olan e^{3x}, e^{-x}, e^{4x} fonksiyonları lineer bağımsızdır. Çünkü her x için $W\left(e^{3x}, e^{-x}, e^{4x}\right)(x) = -20e^{6x} \neq 0$ dır. O halde, bu denklemin temel çözümler kümesi $\left\{e^{3x}, e^{-x}, e^{4x}\right\}$ ve genel çözümü $c_1e^{3x} + c_2e^{-x} + c_3e^{4x}$ şeklindedir.

$$L(D)\,y = F(x) \tag{4}$$

homogen olmayan denklemini ele alalım.

Teorem: (4) homogen olmayan denkleminin bir çözümü g ve bu denkleme karşılık gelen $L(D)\,y = 0$ homogen denkleminin bir çözümü f olsun. Bu durumda $f + g$ de (4) denkleminin bir çözümüdür.

Tanım: (2) denkleminin genel çözümüne (1) denkleminin tamamlayıcı fonksiyonu denir. (1) denkleminin herhangi bir keyfi sabit içermeyen çözümüne (1) denkleminin özel çözümü denir. (1) denkleminin tamamlayıcı fonksiyonu y_c, özel çözümü de y_p ile gösterilsin. Bu durumda (1) denkleminin genel çözümü $y_c + y_p$ şeklindedir.

Örnek:

$$y'' - 5y' + 6y = 1$$

diferensiyel denklemini ele alalım. $f_1(x) = e^{3x}$ ve $f_2(x) = e^{2x}$ bu denkleme karşılık gelen homogen

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

denkleminin lineer bağımsız çözümleridir. Ayrıca $y_p = \frac{1}{6}$ olarak bulunabilir. Bu durumda verilen denklemin genel çözümü

$$y(x) = c_1e^{3x} + c_2e^{2x} + \frac{1}{6}$$

olur.