

Sabit Katsayılı Homogen Denklemler

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0 \quad (1)$$

sabit katsayılı homogen denklemini ele alalım. $y(x) = e^{rx}$ (1) denkleminin bir çözümünü olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} a_0 r^n e^{rx} + a_1 r^{n-1} e^{rx} + \dots + a_{n-1} r e^{rx} + a_n e^{rx} &= 0 \\ e^{rx} (a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n) &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. $e^{rx} \neq 0$ olduğundan

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0$$

olur. (2) denkleme (1) denkleminin karakteristik denklemi denir. (2) denkleminin köklerinin yapısına göre çözüm yazılır. Şimdi, ikinci basamaktan sabit katsayılı homogen

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (2)$$

diferensiyel denklemini ele alalım. (2) diferensiyel denkleme ilişkin karakteristik denklem

$$r^2 + ar + b = 0$$

şeklindedir.

Durum 1: Kökler birbirinden reel ve farklı ise, (r_1, r_2)

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

çözümü elde edilir.

Durum 2: Kökler reel ve birbirine eşit ise, $(r_1 = r_2 = r)$

$$y(x) = (c_1 + c_2 x) e^{rx}$$

çözümü elde edilir.

Durum 3: Kökler eşlenik kompleks ise, $(r_{1,2} = a \pm ib)$

$$y(x) = e^{ax} (c_1 \cos bx + c_2 \sin bx)$$

çözümü elde edilir. Şimdi de yüksek basamaktan sabit katsayılı homogen denklemlere ilişkin birkaç örnek çözelim.

Örnek 1:

$$y''' - y'' - 2y' = 0$$

diferensiyel denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm: Verilen denkleme ilişkin karakteristik denklem ve kökleri

$$r^3 - r^2 - 2r = 0$$

$$r_1 = 0, r_2 = 2, r_3 = -1$$

şeklindedir. O halde, verilen denklemin genel çözümü

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-x}$$

olarak bulunur.

Örnek 2:

$$y'' + 4y' + 5y = 0$$

diferensiyel denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm: Verilen denkleme ilişkin karakteristik denklem ve kökleri

$$r^2 + 4r + 5 = 0$$

$$r_{1,2} = -2 \pm i$$

şeklindedir. O halde, verilen denklemin genel çözümü

$$y(x) = e^{-2x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$$

olarak bulunur.

Örnek 3:

$$y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0$$

diferensiyel denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm: Verilen denkleme ilişkin karakteristik denklem ve kökleri

$$r^4 - 2r^3 + 2r^2 - 2r + 1 = 0$$

$$r_1 = r_2 = 1, \quad r_{3,4} = \pm i$$

şeklindedir. O halde, verilen denklemin genel çözümü

$$y(x) = (c_1 + c_2 x) e^x + c_3 \cos x + c_4 \sin x$$

olarak bulunur.

Örnek 4:

$$y^{(4)} - 4y''' + 14y'' - 20y' + 25y = 0$$

diferensiyel denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm: Verilen denkleme ilişkin karakteristik denklem ve kökleri

$$r^4 - 4r^3 + 14r^2 - 20r + 25 = 0$$

$$r_{1,2} = 1 + 2i, \quad r_{3,4} = 1 - 2i$$

şeklindedir. O halde, verilen denklemin genel çözümü

$$y(x) = e^x [(c_1 + c_2 x) \cos 2x + (c_3 + c_4 x) \sin 2x]$$

olarak bulunur.