B) Kanonik Forma İndirgeme

$$P_1(x) = \frac{2}{u}\frac{du}{dx} + P(x) = 0$$

alınırsa

$$u = e^{\frac{-1}{2}\int P(x)dx}$$

bulunur. Buna göre

$$Q_1(x) = Q(x) - \frac{1}{4}P^2(x) - \frac{1}{2}\frac{dP}{dx} \text{ ve } R_1(x) = \frac{R(x)}{u}$$

şeklinde hesaplanır. Eğer $Q_1(x) = A$, bir sabit ise, o zaman (2) denklemi

$$\frac{d^2v}{dx^2} + Av = \frac{R(x)}{u}$$

şeklinde 2. basamaktan sabit katsayılı bir denkleme indirgenmiş olur. Eğer $Q_1(x) = \dfrac{A}{x^2}$ ise, o zaman (2) denklemi

$$x^2\frac{d^2v}{dx^2} + Av = \frac{x^2R(x)}{u}$$

şeklinde bir Euler denklemine indirgenir.

Örnek 1.

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)y = xe^x$$

denklemini çözünüz.

Çözüm. Bu denklem için $Q_1(x) = 1$ olarak hesaplanır. Ayrıca $u = e^{\frac{-1}{2}\int -\frac{2}{x}dx} = x$ olup, orijinal denkleme $y = xv$ dönüşümü uygulanırsa,

$$\frac{d^2v}{dx^2} + v = e^x$$

sabit katsayılı denklemi elde edilir. Bu denklemin genel çözümü

$$v = c_1\cos x + c_2\sin x + \frac{1}{2}e^x$$

dir, buradan orijinal denklemin genel çözümü

$$y = c_1x\cos x + c_2x\sin x + \frac{1}{2}xe^x$$

olur.

Örnek 2.

$$4x^2y'' + 4x^3y' + \left(x^2+1\right)^2y = x^2e^{-x^2/4}\ln x$$

denklemini çözünüz.

Çözüm. Bu denklem için $P(x) = x,\ Q(x) = \dfrac{\left(x^2+1\right)^2}{4x^2}$ and $R(x) = \dfrac{e^{-x^2/4}\ln x}{4}$ olup, $u = e^{-x^2/4}$ şeklinde hesaplanır. O halde denkleme $y = e^{-x^2/4}v$ dönüşümü uygulanırsa, $Q_1(x) = \dfrac{1}{4x^2}$ olmak üzere

$$v'' + \frac{1}{4x^2}v = \frac{\ln x}{4}$$

Euler denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü

$$v = (c_1 + c_2 \ln x)\, x^{1/2} + \frac{x^2}{9}\left(\ln x - \frac{4}{3}\right)$$

olup, verilen denklemin çözümü

$$y(x) = e^{-x^2/4}\left[(c_1 + c_2 \ln x)\, x^{1/2} + \frac{x^2}{9}\left(\ln x - \frac{4}{3}\right)\right].$$

2) Bağımsız Değişken Değiştirme

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)\,y = R(x) \tag{1}$$

denklemi için

$$z = \Theta(x)$$

dönüşümü uygulanırsa,

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{\frac{d^2z}{dx^2} + P\frac{dz}{dx}}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\frac{dy}{dz} + \frac{Q}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}y = \frac{R}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \tag{2}$$

bulunur.$z = \Theta(x)$ fonksiyonu

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{\frac{\pm Q}{a^2}}$$

olacak şekilde seçilsin; burada $\pm$ işaretleri $\frac{dz}{dx}$ türevini reel değerli kılmak içindir, a^2 herhangi bir pozitif sayıdır ve çoğunlukla $a^2 = 1$ alınır. Eğer

$$\frac{\frac{d^2z}{dx^2} + P\frac{dz}{dx}}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = A, \text{ bir sabit,}$$

ise, o zaman (2) denklemi

$$\frac{d^2y}{dz^2} + A\frac{dy}{dz} \pm a^2y = \frac{R}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

şeklinde sabit katsayılı bir denkleme indirgenir.
Örnek.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \cot x\frac{dy}{dx} - \sin^2 x\; y = \cos x - \cos^3 x$$

denklemini çözünüz.
Çözüm. $Q = -\sin^2 x$ olduğundan,

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{\frac{-Q}{1}} = \sqrt{\sin^2 x} = \sin x,$$

$$\frac{\frac{d^2z}{dx^2} + P\frac{dz}{dx}}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = 0$$

bulunur. O halde $z = -\cos x$ dönüşümü verilen denkleme uygulanırsa,

$$\frac{d^2y}{dz^2} - y = -z$$

denklemin elde edilir. Bu denklemin çözümü $z = c_1e^z + c_2e^{-z} + z$ olup, verilen denklemin çözümü

$$y = c_1e^{-\cos x} + c_2e^{\cos x} - \cos x$$

dir.
Örnek. Aşağıdaki denklemleri çözünüz.

1) $y'' - (1+4e^x)\, y' + 3e^{2x} y = e^{2(x+e^x)}$,

2) $\cos^4 x\ y'' + 2\cos^2 x\,(1-\cos x \sin x)\, y' + y = 0.$