Bölüm 7 Yüksek Basamaktan Lineer Olmayan Diferensiyel Denklemler

Bu bölümde n-yinci basamaktan lineer olmayan

$$f\left(y^{(n)}, y^{(n-1)}, ..., y^{'}, y, x\right) = 0 \tag{1}$$

denklemi incelenmektedir. Belirtelim ki burada ifade edilen bütün sonuçlar lineer denklemler için de geçerlidir.

1) Bağımlı Değişkeni İçermeyen Denklemler:

$$f\left(y^{(n)}, y^{(n-1)}, ..., y^{'}, x\right) = 0 \tag{2}$$

denkleminde y bağımlı değişkeni yoktur. O halde

$$y^{'} = p \quad , \quad p = p(x)$$

konumu (2) denklemine uygulanır ve

$$f\left(p^{(n-1)}, p^{(n-2)}, ..., p, x\right) = 0 \tag{3}$$

şeklinde $(n-1)$-inci basamaktan bir denklem elde edilir. Orijinal denklem

$$f\left(y^{(n)}, y^{(n-1)}, ..., y^{(k)}, x\right) = 0 \tag{4}$$

şeklinde ise, o zaman

$$y^{(k)} = p$$

dönüşümü yapılarak $(n-k)$-ıncı basamaktan

$$f\left(p^{(n-k)}, ..., p^{'}, p, x\right) = 0 \tag{5}$$

denklemi elde edilir; yani orijinal denklemin basamağı k kadar eksilmiştir.

Örnek 2:

$$2\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4 = 0 \tag{6}$$

denklemini çözünüz.

Çözüm: $y^{'} = p$ dersek, $y^{''} = p^{'}$ olur ve (6) denklemi

$$2p^{'} - p^2 + 4 = 0 \tag{7}$$

ya da

$$\frac{2dp}{p^2 - 4} = dx \tag{8}$$

şeklini alır. İntegre edilirse,

$$p = 2\left(1 + \frac{2c_1e^{2x}}{1 - c_1e^{2x}}\right)$$

ve $y^{'}=p$ den,

$$y=2x-2\ln\left(1-c_1e^{2x}\right)+c_2 \quad .$$

Örnek 3:

$$(1+2x)\,y^{'''}+4xy^{''}-(1-2x)\,y^{'}=e^{-x}$$

denklemini çözünüz.

2) Bağımsız Değişkeni İçermeyen Denklemler:

Bir denklem x den bağımsız, yani,

$$f\left(y^{(n)},y^{(n-1)},...,y^{'},y\right)=0 \tag{9}$$

şeklinde ise, o zaman

$$y^{'}=p \quad , \quad p=p\,(y) \quad ,$$

dönüşümü uygulanır. Bu durumda ilgili türevler

$$\begin{aligned} y^{''} &= \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy} \\ y^{'''} &= \frac{d}{dx}\left(p\frac{dp}{dy}\right)=p^2\frac{d^2p}{dy^2}+p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 \\ &\quad ... \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır ve (9) da yerlerine konursa, basamak bir indirgenmiş olur. Örneğin, 3. basamaktan

$$yy^{'''}-y^{''}\left(y^{'}\right)^2=1$$

denklemi x değişkenini içermediği için

$$y^{'}=p \quad , \quad p=p\,(y) \quad ,$$

dönüşümü uygulanır ve 2. basamaktan

$$yp^2\frac{d^2p}{dy^2}+py\left(\frac{dp}{dy}\right)^2-p^3\frac{dp}{dy}=1$$

denklemi bulunur.

Örnek 4:

$$yy^{''}=2\left(y^{'}\right)^2-2y^{'}$$

denklemini çözünüz.

Çözüm: $y^{'}=p$, $y^{''}=p\frac{dp}{dy}$ den,

$$p\left(y\frac{dp}{dy}-2p+2\right)=0$$

olup buradan $p=0$ ve dolayısıyla $y=c$ bir çözümdür. Diğer taraftan

$$\frac{dp}{p-1}=2\frac{dy}{y}$$

integre edilirse

$$p = A^2 y^2 + 1$$

elde edilip $\frac{dy}{dx} = p$ den

$$Ay = \tan(Ax + B)$$

çözümü bulunmuş olur.

3) Tam Denklemler:

$$f\left(y^{(n)}, y^{(n-1)}, ..., y^{'}, y, x\right) = R(x) \tag{10}$$

denklemi, bir düşük basamaktan

$$g\left(y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, ..., y^{'}, y, x\right) = R_1(x) + c \tag{11}$$

denkleminin x e göre türevinden elde edilebiliyorsa, o zaman (10) a bir tam denklem denir.

Örneğin,

$$3y^2 y^{'''} + 14yy^{'}y^{''} + 4\left(y^{'}\right)^3 + 12y^{'}y^{''} = 2x$$

denklemi bir tam denklemdir, çünkü bu denklem

$$3y^2 y^{''} + 4y\left(y^{'}\right)^2 + 6\left(y^{'}\right)^2 = x^2 + c$$

denkleminin türevlenmesiyle elde edilmektedir.

Uyarı:

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)\, y^{'} + a_n(x)\, y = 0 \tag{12}$$

homogen denklemi,

$$a_n(x) - a_{n-1}^{'}(x) + a_{n-2}^{''}(x) + ... + (-1)^n a_0^{(n)}(x) \equiv 0$$

ise, tamdır. Örneğin,

$$\left(x^3 - 2x\right) y^{'''} + \left(8x^2 - 5\right) y^{''} + 15xy^{'} + 5y = 0$$

denklemi tamdır, çünkü

$$a_3(x) - a_2^{'}(x) + a_1^{''}(x) - a_0^{'''}(x) = 5 - 15 + 16 - 6 = 0$$

dir. Gerçekten, orijinal denklem,

$$\left(x^3 - 2x\right) y^{''} + \left(5x^2 - 3\right) y^{'} + 5xy = c$$

denkleminin türevidir. (10) denklemi lineer olmadığı zaman tamlık için söylenebilecek bir kriter yoktur.

Örnek 1:

$$xy^{'''} + \left(x^2 + x + 3\right) y^{''} + (4x + 2)\, y^{'} + 2y = 0 \tag{13}$$

denklemini çözünüz.

Çözüm:

$$a_3(x) - a_2^{'}(x) + a_1^{''}(x) - a_0^{'''}(x) = 2 - 4 + 2 - 0 = 0$$

olduğundan, (13) denklemi tamdır. (13) denklemi

$$\frac{d}{dx}\left[xy^{''} + \left(x^2 + x + 2\right)y^{'} + (2x+1)\,y\right] = 0 \tag{14}$$

şeklinde yazılabilir. Her iki yan integre edilirse

$$xy^{''} + \left(x^2 + x + 2\right)y^{'} + (2x+1)\,y = c_1 \tag{15}$$

bulunur. (15) in tam olup olmadığına bakalım:

$$\frac{d}{dx}\left[xy^{'} + \left(x^2 + x + 1\right)y\right] = \frac{d}{dx}\left[c_1 x + c_2\right] \tag{16}$$

olduğundan (15) denklemi tamdır. (16) denkleminin her iki tarafı integre edilirse

$$y^{'} + \left(x + 1 + \frac{1}{x}\right)y = c_1 + \frac{c_2}{x}$$

1. basamaktan lineer denklemi elde edilmiş olup bu denklemin çözümü

$$xe^{\frac{1}{2}\left(x^2+2x\right)}y = c_1\int xe^{\frac{1}{2}\left(x^2+2x\right)}dx + c_2\int e^{\frac{1}{2}\left(x^2+2x\right)}dx + c_3$$

şeklindedir.

Örnek 2:

$$2y\frac{d^3y}{dx^3} + 6\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$

denklemini çözünüz.