Green Fonksiyonu

Bu bölümde

$$p_0(x)\,y'' + p_1(x)\,y' + p_2(x)\,y = f(x) \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \ell_1[y] &= a_0 y(a) + a_1 y'(a) + \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = A \\ \ell_2[y] &= \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) + b_0 y(b) + b_1 y'(b) = B \end{aligned} \tag{2}$$

homogen olmayan BVP ve homogen

$$p_0(x)\,y'' + p_1(x)\,y' + p_2(x)\,y = 0 \tag{3}$$

$$\ell_1[y] = 0,\ \ \ell_2[y] = 0 \tag{4}$$

BVP yi ele alalım. Şimdi homogen $(3)-(4)$ BVP için Green fonksiyonu olarak adlandırılan bir $G(x,t)$ fonksiyonu bulacağız ve homogen olmayan (1), (4) BVP nin çözümünün $G(x,t)$ cinsinden açık olarak ifade edilebildiğini göstereceğiz. Daha sonra $(1)-(2)$ BVP nin çözümü de Green fonksiyonu cinsinden hesaplanabilecektir. Bundan böyle homogen $(3)-(4)$ probleminin sadece aşikar çözüme sahip olduğu kabul edilecektir.

Tanım. $[a,b]\times[a,b]$ karesel bölgesinde tanımlı ve aşağıdaki özelliklere sahip olan bir $G(x,t)$ fonksiyonuna $(3)-(4)$ homogen BVP için Green fonksiyonu denir:

(i) $G(x,t)$, $[a,b]\times[a,b]$ içinde süreklidir;

(ii) $\dfrac{\partial G(x,t)}{\partial x}$, $a\le x\le t$ ve $t\le x\le b$ üçgensel bölgelerinde sürekli olup

$$\frac{\partial G(t^+,t)}{\partial x} - \frac{\partial G(t^-,t)}{\partial x} = \frac{1}{p_0(t)}$$

dir; burada

$$\frac{\partial G(t^+,t)}{\partial x} = \lim_{\substack{x\to t\\ x>t}} \frac{\partial G(x,t)}{\partial x},\ \ \frac{\partial G(t^-,t)}{\partial x} = \lim_{\substack{x\to t\\ x<t}} \frac{\partial G(x,t)}{\partial x};$$

(iii) Her $t\in[a,b]$ için $z(x)=G(x,t)$ fonksiyonu $a\le x<t$ ve $t<x\le b$ aralıklarının her birinde (3) homogen denklemini sağlar;

(iv) Her $t\in[a,b]$ için $z(x)=G(x,t)$ fonksiyonu (4) homogen sınır koşullarını sağlar.

Green fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur:

(3) ün lineer bağımsız iki çözümü $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ olsun. Bu durumda $G(x,t)$ Green fonksiyonu

$$G(x,t) = \begin{cases} y_1(x)\,\lambda_1(t) + y_2(x)\,\lambda_2(t),\ \ a\le x\le t, \\ y_1(x)\,\lambda_1(t) + y_2(x)\,\lambda_2(t) + y_1(x)\,\psi_1(t) + y_2(x)\,\psi_2(t),\ \ t\le x\le b, \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\psi_1(t)$ ve $\psi_2(t)$

$$\begin{cases} y_1(t)\,\psi_1(t) + y_2(t)\,\psi_2(t) = 0 \\ y_1'(t)\,\psi_1(t) + y_2'(t)\,\psi_2(t) = \frac{1}{p_0(t)} \end{cases} \tag{5}$$

sisteminden, $\lambda_1(t)$ ve $\lambda_2(t)$ ise

$$\left\{\begin{array}{r} \ell_1[y_1]\lambda_1(t)+\ell_1[y_2]\lambda_2(t)=-\beta_0\left(y_1(b)\psi_1(t)+y_2(b)\psi_2(t)\right) \\ -\beta_1\left(y_1'(b)\psi_1(t)+y_2'(b)\psi_2(t)\right) \\ \ell_2[y_1]\lambda_1(t)+\ell_2[y_2]\lambda_2(t)=-b_0\left(y_1(b)\psi_1(t)+y_2(b)\psi_2(t)\right) \\ -b_1\left(y_1'(b)\psi_1(t)+y_2'(b)\psi_2(t)\right) \end{array}\right. \tag{6}$$

sisteminden elde edilir.
Teorem $(3)-(4)$ homogen BVP sadece belirgin çözüme sahip olsun. Bu durumda

1) $(3)-(4)$ homogen problemi için bir tek $G(x,t)$ Green fonksiyonu vardır,
2) Homogen olmayan (1), (4) BVP nin tek $y(x)$ çözümü

$$y(x)=\int_a^b G(x,t)\,f(t)\,dt. \tag{7}$$

Sonuç (1) denklemi self adjoint $(p_0'=p_1)$ olsun. Bu durumda

$$p_0(x)\,y''+p_1(x)\,y'+p_2(x)\,y=0 \tag{8}$$

$$\begin{aligned} a_0y(a)+a_1y'(a) &= 0 \\ b_0y(b)+b_1y'(b) &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

BVP sadece sıfır çözümüne sahipse, bu durumda $(8)-(9)$ BVP için Green Fonksiyonu

$$G(x,t)=\frac{1}{c}\left\{\begin{array}{l} y_1(x)\,y_2(t)\,,\ a\le x\le t, \\ y_1(t)\,y_2(x)\,,\ t\le x\le b, \end{array}\right.$$

burada

$$c=p_0(t)\,W(y_1,y_2)(t)$$

ve y_1, y_2, sırasıyla,

$$\begin{aligned} p_0(x)\,y''+p_1(x)\,y'+p_2(x)\,y &= 0,\ y(a)=a_1,\ y'(a)=-a_0 \\ p_0(x)\,y''+p_1(x)\,y'+p_2(x)\,y &= 0,\ y(b)=-b_1,\ y'(b)=b_0 \end{aligned}$$

IVP çözümleridir.
Örnek.

$$\begin{aligned} y''+y &= 0 \\ y(0) &= y(\pi/2)=0 \end{aligned}$$

problemi için bir Green fonksiyonu oluşturunuz ve

$$\begin{aligned} y''+y &= 1+x \\ y(0) &= y(\pi/2)=0 \end{aligned} \tag{10}$$

BVP yi çözünüz.
Çözüm $y'' + y = 0$ denkleminin lineer bağımsız iki çözümü $y_1(x) = \cos x$ ve $y_2(x) = \sin x$ dir. (5) dan

$$\begin{cases} \cos t\psi_1(t) + \sin t\psi_2(t) = 0 \\ -\sin t\psi_1(t) + \cos t\psi_2(t) = 1 \end{cases}$$

olup $\psi_1(t) = -\sin t$ ve $\psi_2(t) = \cos t$ şeklinde bulunur. Öte yandan (6) den $\lambda_1(t) = 0$ ve $\lambda_2(t) = -\cos t$ bulunur. Böylece Green fonksiyonu

$$G(x,t) = \begin{cases} -\sin x \cos t, & 0 \le x \le t, \\ -\cos x \sin t, & t \le x \le \pi/2 \end{cases}$$

şeklinde elde edilir. (10) BVP nin çözümü $f(t) = 1 + t$ olmak üzere (7) den,

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^{\pi/2} G(x,t)(1+t)\,dt \\ &= \int_0^x (-\cos x \sin t)(1+t)\,dt + \int_x^{\pi/2} (-\sin x \cos t)(1+t)\,dt \\ &= 1 + x - \cos x - (1 + \pi/2)\sin x \end{aligned}$$

bulunur.
Örnek.

$$\begin{aligned} y'' - y &= 2\sin x \\ y(0) &= 0,\ y(1) = 2 \end{aligned}$$

probleminin çözümünü Green fonksiyonu yardımıyla bulunuz.