Frobenius Metodu

$$P_0(x)\,y'' + P_1(x)\,y' + P_2 y = 0 \tag{1}$$

diferensiyel denklemini ele alalım. Burada $P_0(x)$, $P_1(x)$ ve $P_2(x)$ ortak çarpanları olmayan polinomlardır.

x_0 noktası bir adi nokta ise (1) denkleminin çözümleri x_0 civarında $x - x_0$ ın kuvvetleri cinsinden yazılabildi.

x_0 noktası (1) in bir singüler noktası ise, o zaman çözümler $x - x_0$ a göre kuvvet serisi cinsinden genellikle bulunamaz. Yine de x_0 ın bir düzgün singüler nokta olması halinde çözümlerin x_0 civarındaki davranışı incelenebilmektedir.

Teorem 1. x_0 noktası (1) in bir düzgün aykırı noktası olsun. Bu durumda (1) in $0 < |x - x_0| < R$ üzerinde yakınsak olan

$$y = (x - x_0)^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{2}$$

şeklinde en az bir çözümü daima vardır. Burada $a_0 \neq 0$ ve λ uygun seçilen bir sayıdır.

Tanım. (2) formundaki çözümlere Frobenius çözümleri ve bu çözümleri bulmak için kullanılan yönteme Frobenius metodu denir.

Frobenius Metodu:

F.G. Frobenius, kuvvet serilerinden daha genel olan (2) serisini kullanmıştır. Bu yönteme göre (1) denkleminin (2) biçiminde bir çözüme sahip olduğu kabul edilerek kuvvet serisi yöntemindekine benzer asımlar izlerinir.Daha sonra λ sabiti ve a_n $(n \geq 1)$ katsayıları belirlenir. λ sabiti indisel denklem denilen bir kuadratik denklemin kökleridir. Bu kökler gerçel ve farklı; gerçel ve eşit veya kömpleks eşlenik olabilirler. Kökler eşlenik kömpleks ise, o zaman Euler bağıntısı ve $x^{\alpha \pm i\beta} = x^{\alpha} e^{\pm i\beta \ln x}$ özdeşliği kullanılarak karmaşık çözümlerden gerçel çözümler elde edilir. Sadelik olsun diye burada indisel denklemin köklerinin gerçel olması durumu incelenecektir.

$\lambda\,(\lambda = \lambda_1 \geq \lambda_2)$ indisel denklemin büyük kökü ise o zaman Frobenius yöntemi daima

$$\begin{aligned} y_1(x) &= (x - x_0)^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda_1)(x - x_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda_1)(x - x_0)^{n+\lambda_1} \end{aligned}$$

şeklinde bir çözüm verir.

Teorem 2. $x_0 = 0$ noktası (1) in bir düzgün singüler noktası olsun. λ_1 ve λ_2 $(\lambda_1 \geq \lambda_2)$ indisel denkleminin kökleri ise bu durumda (1) in bağımsız çözümlerinden biri

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda_1)\, x^{n+\lambda_1}$$

olup diğeri aşağıdaki şekilde heaplanır:

Durum 1. $\lambda_1 - \lambda_2 \notin Z^+$ olsun. Bu durumda

$$y_2(x) = y(\lambda, x)\mid_{\lambda=\lambda_2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda_2)\, x^{n+\lambda_2}.$$

Durum 2. $\lambda_1 = \lambda_2$ olsun. Bu durumda

$$y_2(x) = \frac{\partial}{\partial \lambda} y(\lambda, x)\mid_{\lambda=\lambda_1=\lambda_2} = y_1(x)\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\lambda_1)\, x^{n+\lambda_1}.$$

Durum 3. $\lambda_1 - \lambda_2 \in Z^+$ olsun. Bu durumda

$$y_2(x) = \frac{\partial}{\partial \lambda}(\lambda - \lambda_2)\, y(\lambda, x)\mid_{\lambda=\lambda_2} = d_{-1} y_1(x)\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} d_n(\lambda_2)\, x^{n+\lambda_2}.$$

Burada $a_n(\lambda_1)$, $a_n(\lambda_2)$, $b_n(\lambda_1)$, $b_n(\lambda_2)$ ve d_{-1} katsayılarının hepsi sabittir ve yerine göre sıfır olabilirler.

Ayrıca, herbir durumda $y_2(x)$ çözümü $0 < |x| < R$ şeklinde bir aralık üzerinde tanımlı olup (1) in genel çözümü

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

dir. Burada c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir.

Her iki serinin de ortak yakınsaklık aralığında çözüm geçerlidir.

Örnek 1.

$$8x^2 y'' + 10xy' + (x-1)\,y = 0;\ \ x = 0$$

Çözüm. $x = 0$ verilen denklemin bir düzgün aykırı noktasıdır.

$$y = (x)^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x)^n$$

denklemde yerine yazılırsa,

$$\left(8\lambda^2 + 2\lambda - 1\right) a_0 x^{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \{[(\lambda+n+1)(8\lambda+8n+10) - 1]\, a_{n+1} + a_n\}\, x^{\lambda+1+n} \equiv 0$$

elde edilir. Buradan

$$8\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0 \tag{a}$$

indisel denklemine ve

$$a_n = -\frac{1}{[4(\lambda+n) - 1]\,[2(\lambda+n) + 1]} a_{n-1} \quad n = 1, 2, ... \tag{b}$$

genel indirgeme formülüne varılır.

İndisel denklemin kökleri $\lambda_1 = 1/4$ ve $\lambda_2 = -1/2$ dir.
$\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{3}{4} \notin Z^+$ dır.
$\lambda = \frac{1}{4}$ için (b) formülü

$$a_n = -\frac{1}{2n\,(4n+3)} a_{n-1}, \qquad n = 1, 2, ...$$

şeklini alır. Buradan

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{2^n n!\,[7.11.15.....\,(4n-1)\,(4n+3)]} a_0\ , \qquad n = 1, 2, ... \qquad \text{(c)}$$

dır. Böylece $\lambda = \frac{1}{4}$ ve (c) katsayıları Frobenius serisinde yerlerine koyulursa

$$y_1\,(x) = a_0 x^{1/4} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!\,[7.11.15.....\,(4n-1)\,(4n+3)]} x^n \right]$$

şeklinde birinci bağımsız çözüm elde edilir.
$\lambda = -\frac{1}{2}$ için de benzer işlemler yapılırsa ikinci bağımsız çözüm

$$y_2\,(x) = a_0 x^{-1/2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!\,[1.5.9.....\,(4n-7)\,(4n-3)]} x^n \right]$$

şeklinde bulunur.
Genel çözüm:

$$y = c_1 y_1\,(x) + c_2 y_2\,(x)$$

dir.