7. DOĞRUSAL OLMAYAN REGRESYON MODELLERİ

Daha önceki bölümlerde basit doğrusal ve çoklu doğrusal regresyon modellerinin oluşturulması ve çözümleri hakkında bilgi verildi. Bağımlı değişken (Y) ve bağımsız değişken (X) arasında olması gereken ya da olduğu kabul edilen doğrusal ilişki bir çok iktisadi ilişki için mevcut olmayabilir. Değişkenler arasında doğrusal ilişki olmaması durumunda ise hangi doğrusal olmayan model uygun ise onun belirlenmesi gerekecektir. Bir modelde hangi değişkenlerin yer alacağı ne kadar önemli ise de hangi modelin kurulacağı da o kadar önemlidir.

İktisadi ilişkilerin açıklanması esnasında modelin fonksiyonel şekli önem arz etmektedir. Doğrusal modelin özellikleri her tür ilişkinin açıklanması için yeterli olmayabilecektir. Doğrusal ya da doğrusal olmama kavramı modelin fonksiyonel şekline bağlıdır. Model içerisinde yer alan parametrelerin biri veya tümü doğrusal yapıda olamayabilir. Aynı şekilde, modelde yer alan parametreler gibi değişken yapısı doğrusal ya da doğrusal olmayabilir. Marjinal etkileri, değişkenlere göre doğrusallıktan hareketle elde ettiğimiz için önemlidir.

Modelin doğrusal bir yapıda olmaması yani doğrusal olmayan bir yapıya sahip olması, modelin En Küçük Kareler tahmini yapılmasını zorlaştıracaktır. En Küçük Kareler tahmininin yapılabilmesi için modelin doğrusal ya da doğrusala dönüştürülmüş modeller olması gereklidir. Matematiksel yapıları itibariyle, modeller doğrusal olmayan formlarda olabilir. Bu noktada, ilgili matematiksel yapı üzerinde logaritma (doğal ya da on tabanına göre) alma veya değişken dönüştürme gibi işlemler vasıtasıyla yapı doğrusal forma dönüştürülebilecektir. Bu tür modeller gerçekte doğrusal modeller adını alır. Bu gerçekte doğrusal modeller, En Küçük Kareler yöntemi sayesinde elde edilen normal denklemler ile çözülebilir.

7.1. Gerçekte Doğrusal Regresyon Modellerinin Açıklanması

Değişkenlerde doğrusal olmayabilen ancak katsayılarda doğrusal veya değişkenlerin uygun bir dönüştürmesiyle doğrusal hale gelen ve yaygın olarak kullanılan modeller mevcuttur. Burada gerçekte doğrusal modeller arasında sık olarak kullanılan yarı logaritmik, tam logaritmik, kuadratik ve ters modeller incelenecektir.

7.1.1. Tam Logaritmik Model

Üstel regresyon modelimiz şu şekilde olsun;

$$Y_i = \beta_1 X_i^{\beta_2} e^{u_i}$$

Modelin iki tarafının e tabanına göre logaritması alındığında,

$$\ln Y_i = \ln \beta_1 + \beta_2 \ln X_i + u_i \ln e$$

Bu modelde, ln doğal logaritma olup e tabanına göre logaritmadır ve e=2.718'dir.

Yukarıdaki modelde $\alpha = \ln \beta_1$, $\ln Y_i = Y_i^*$ ve $\ln X_i = X_i^*$ düzenlemesini yaparak modeli yeniden yazarsak;

$Y_i^* = \alpha + \beta_2 X_i^* + u_i$ şeklinde olacaktır (Güriş ve Çağlayan, 2010).

Bu model, anakütlenin α ve β_2 katsayılarında doğrusaldır. Modelde görüleceği gibi, Y ve X'in logaritmalarında da model yine doğrusal olduğundan dolayı artık modelimiz En Küçük Kareler Yöntemi ile tahmin edilebilecektir.

Tam logaritmik modelin (log-log) en önemli özelliklerinden birisi, β_2 eğim katsayısının Y'nin X'e göre esnekliğini göstermesidir. Bu esneklik, $(\Delta Y/Y)/(\Delta X/X)=(\Delta Y/\Delta X)(X/Y)$ formülü kullanıldığında model için β_2 eğim katsayısını verir. Esnekliğin yorumu ise, X'teki bir yüzde değişme karşısında Y'deki yüzde değişmeyi gösterir şeklinde yapılacaktır.

Örnek 7.1. 2001-2013 yılları arasındaki Şekerpancarı verimine etki eden kullanılan gübre miktarları verilmiştir. İki değişken arasındaki ilişkinin tam logaritmik bir ilişki olduğu varsayımı ile regresyon modelinin parametrelerini EKK yöntemi ile tahmin ediniz?

Modelde yer alan verim ve gübre değişkenlerinin dönüşümü yapılarak aşağıdaki Çizelgede düzenlenmiştir.

Çizelge 13. Türkiye'de Şekerpancarı Verimi, Gübre Kullanım Miktarları ve Hesap Değerleri

Yıl	Verim (10 kg/da)	Gübre (10 Kg/da)	$\ln Y_i = Y_i^*$	$\ln X_i = X_i^*$
2001	354	1,0	5,86930	0,00000
2002	444	1,1	6,09582	0,09531
2003	401	1,2	5,99396	0,18232
2004	429	1,0	6,06146	0,00000
2005	452	1,3	6,11368	0,26236
2006	446	1,4	6,10032	0,33647
2007	415	1,1	6,02828	0,09531
2008	482	1,2	6,17794	0,18232
2009	533	1,3	6,27852	0,26236
2010	545	1,2	6,30079	0,18232
2011	548	1,5	6,30628	0,40547
2012	532	1,4	6,27664	0,33647
2013	566	1,5	6,33859	0,40547

Y: Verim(10 kg/da), X: Gübre(10 Kg/da), Kaynak: Türkiye İstatistik Kurumu, 2014.

Daha sonra matris işlemleri ile çözüm yapıldığında,

$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$ bu formülden parametrelerin tahminine ulaşılır.

Çizelgede dönüşümü yapılan logaritmik değerler kullanılarak X ve Y matrisleri oluşturulmuştur.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0,00000 \\ 1 & 0,09531 \\ 1 & 0,18232 \\ 1 & 0,00000 \\ 1 & 0,26236 \\ 1 & 0,33647 \\ 1 & 0,09531 \\ 1 & 0,18232 \\ 1 & 0,26236 \\ 1 & 0,18232 \\ 1 & 0,40547 \\ 1 & 0,33647 \\ 1 & 0,40547 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 5,86930 \\ 6,09582 \\ 5,99396 \\ 6,06146 \\ 6,11368 \\ 6,10032 \\ 6,02828 \\ 6,17794 \\ 6,27852 \\ 6,30079 \\ 6,30628 \\ 6,27664 \\ 6,33859 \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki matrisler kullanılarak, $X'X$ ve $X'Y$ matrisi hesaplanmıştır.

$$X'X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0,00000 & 0,09531 & 0,18232 & 0,00000 & 0,26236 & 0,33647 & 0,09531 & 0,18232 & 0,26236 & 0,18232 & 0,40547 & 0,33647 & 0,40547 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0,00000 \\ 1 & 0,09531 \\ 1 & 0,18232 \\ 1 & 0,00000 \\ 1 & 0,26236 \\ 1 & 0,33647 \\ 1 & 0,09531 \\ 1 & 0,18232 \\ 1 & 0,26236 \\ 1 & 0,18232 \\ 1 & 0,40547 \\ 1 & 0,33647 \\ 1 & 0,40547 \end{bmatrix}$$

$$X'X = \begin{bmatrix} 13 & 2,75 \\ 2,75 & 0,82 \end{bmatrix}$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0,00000 & 0,09531 & 0,18232 & 0,00000 & 0,26236 & 0,33647 & 0,09531 & 0,18232 & 0,26236 & 0,18232 & 0,40547 & 0,33647 & 0,40547 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 5,86930 \\ 6,09582 \\ 5,99396 \\ 6,06146 \\ 6,11368 \\ 6,10032 \\ 6,02828 \\ 6,17794 \\ 6,27852 \\ 6,30079 \\ 6,30628 \\ 6,27664 \\ 6,33859 \end{bmatrix}$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} 79,94 \\ 17,07 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 0,333472$$

$$AdjA = \begin{bmatrix} 0,810793 & -2,74619 \\ -2,74619 & 13 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,270377 & -0,91578 \\ -0,91578 & 4,335135 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$$

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 0,270377 & -0,91578 \\ -0,91578 & 4,335135 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 79,94158 \\ 17,06635 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 5,985365 \\ 0,77629 \end{bmatrix}$$

Buna göre tam logaritmik model,

$$Y_i^* = 5,99 + 0,78 X_i^*$$

veya

$\ln Y_i = 5,99 + 0,78 \ln X_i$ şeklinde elde edilir.

Model tahminine göre gübredeki %1'lik değişme şekerpancarı verimini ortalama %0.78 artırmaktadır. Esneklik ise açıklayıcı değişkenin katsayına eşittir ve $E_{XY} = \hat{\beta}_2 = 0.78$'dir.

7.1.2. Yarı-Logaritmik Modeller

7.1.2.1. Doğrusal- Logaritmik Model

Doğrusal logaritmik modellerde, modelin solundaki bağımlı değişken doğrusal olurken modelin sağındaki bağımsız değişkenin logaritmik olması durumudur. Bu modele uygun olarak aşağıdaki modeli yazalım:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 \ln X_i + u_i$$

Bu modelde $\ln X_i = X_i^*$ dönüştürmesi yapıldığında modelimizin son hali,

$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i^* + u_i$ şeklinde olacaktır. Artık bu model tahmin edilebilir. Modelde, X'teki yüzde değişime karşılık Y'deki mutlak değişme ile ilgilenilmektedir.

Modelde yer alan β_2 katsayısının yorumu şöyledir:

$$\beta_2 = \frac{Y'deki\ \deg isme}{\ln X'deki\ göreli\ \deg isme} = \frac{Y'deki\ \deg isme}{X'deki\ göreli\ \deg isme}$$

Modeldeki β_2 katsayısı, X değişkenin de meydana gelen nispi değişmenin, Y'de meydana getirdiği mutlak değişmeyi ifade etmektedir. X'teki %1 birimlik (0.01 birim) değişim Y'de 0.01(β_2) kadar değişime sebebiyet vermektedir (Dikmen, 2012).

Örneğin bir çalışmada β_2=200 bulunduğunu varsayalım. Y'deki mutlak değişme (0.01)(200) = 2 olur. Sonuç olarak, en küçük kareler yöntemi ile tahmin edilmiş $Y_i = \beta_1 + \beta_2 \ln X_i + u_i$ modelde, tahmin edilen eğim katsayısı β_2'yi 0.01 ile çarpar veya 100'e bölerek aynı sonucu elde ederiz. Modelde Y'nin X'e göre ortalama esnekliği ise $E_{YX} = \beta_2 * \frac{1}{\overline{Y}}$ formülü ile elde edilir.

Örnek 7.2. 2001-2013 yılları arasındaki Şekerpancarı verimine etki eden kullanılan gübre miktarları verilmiştir. İki değişken arasındaki ilişkinin yarı logaritmik bir ilişki olduğu varsayımı ile regresyon modelinin parametrelerini EKK yöntemi ile tahmin ediniz.

Çizelge 14. Türkiye'de Şekerpancarı Verimi, Gübre Kullanım Miktarları ve Hesap Değerleri

Yıl	**Verim (10 Kg/da)**	**Gübre (10 Kg/da)**	$\ln X_i = X_i^*$
2001	354	1,0	0,00000
2002	444	1,1	0,09531
2003	401	1,2	0,18232
2004	429	1,0	0,00000
2005	452	1,3	0,26236
2006	446	1,4	0,33647
2007	415	1,1	0,09531
2008	482	1,2	0,18232
2009	533	1,3	0,26236
2010	545	1,2	0,18232
2011	548	1,5	0,40547
2012	532	1,4	0,33647
2013	566	1,5	0,40547

Y: Verim(10 kg/da)
X: Gübre(10 Kg/da)
Kaynak: Türkiye İstatistik Kurumu, 2014.

Bu modele uygun olarak aşağıdaki modeli yazalım:

$Y_i = \beta_1 + \beta_2 \ln X_i + u_i$

Bu modelde $\ln X_i = X_i^*$ dönüştürmesi yapıldığında modelimizin son hali,

$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i^* + u_i$ şeklinde olacaktır. Artık bu model tahmin edilebilir. Daha sonra matris işlemleri ile çözüm yapıldığında,

$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$ bu formülden parametrelerin tahminine ulaşılır.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0,00000 \\ 1 & 0,09531 \\ 1 & 0,18232 \\ 1 & 0,00000 \\ 1 & 0,26236 \\ 1 & 0,33647 \\ 1 & 0,09531 \\ 1 & 0,18232 \\ 1 & 0,26236 \\ 1 & 0,18232 \\ 1 & 0,40547 \\ 1 & 0,33647 \\ 1 & 0,40547 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 354 \\ 444 \\ 401 \\ 429 \\ 452 \\ 446 \\ 415 \\ 482 \\ 533 \\ 545 \\ 548 \\ 532 \\ 566 \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki matrisler kullanılarak, $X'X$ ve $X'Y$ matrisi hesaplanmıştır.

$$X'X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0,00000 & 0,09531 & 0,18232 & 0,00000 & 0,26236 & 0,33647 & 0,09531 & 0,18232 & 0,26236 & 0,18232 & 0,40547 & 0,33647 & 0,40547 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0,00000 \\ 1 & 0,09531 \\ 1 & 0,18232 \\ 1 & 0,00000 \\ 1 & 0,26236 \\ 1 & 0,33647 \\ 1 & 0,09531 \\ 1 & 0,18232 \\ 1 & 0,26236 \\ 1 & 0,18232 \\ 1 & 0,40547 \\ 1 & 0,33647 \\ 1 & 0,40547 \end{bmatrix}$$

$$X'X = \begin{bmatrix} 13 & 2,74619 \\ 2,74619 & 0,810793 \end{bmatrix}$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0,00000 & 0,09531 & 0,18232 & 0,00000 & 0,26236 & 0,33647 & 0,09531 & 0,18232 & 0,26236 & 0,18232 & 0,40547 & 0,33647 & 0,40547 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 354 \\ 444 \\ 401 \\ 429 \\ 452 \\ 446 \\ 415 \\ 482 \\ 533 \\ 545 \\ 548 \\ 532 \\ 566 \end{bmatrix}$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} 6147,00 \\ 1381,41 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 0,333472$$

$$AdjA = \begin{bmatrix} 0,810793 & -2,74619 \\ -2,74619 & 13 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,270377 & -0,91578 \\ -0,91578 & 4,335135 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$$

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 0,270377 & -0,91578 \\ -0,91578 & 4,335135 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6147,00 \\ 1381,41 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 396,9385 \\ 359,3343 \end{bmatrix}$$

Buna göre doğrusal logaritmik model,

$$Y_i^* = 396,94 + 359,33 X_i^*$$

veya

$Y_i = 396,94 + 359,33 \ln X_i$ şeklinde elde edilir.

Bu modele göre gübredeki %1'lik artış şekerpancarı verimini yaklaşık 3.5933 (10 Kg/da) birim artırmaktadır. Ortalama esneklik ise $E_{YX} = \beta_2 * \frac{1}{\overline{Y}} = \frac{359,3343}{472,85} = 0.76$ olur.

7.1.2.2. Logaritmik-Doğrusal Model

Logaritmik doğrusal modellerde, modelin solundaki bağımlı değişken logaritmik olurken modelin sağındaki bağımsız değişkenin doğrusal olması durumudur. Bu modele uygun olarak aşağıdaki gibi:

$Y_i = e^{\beta_1 + \beta_2 X_i + u_i}$ bir modeli yazalım.

Her iki tarafın logaritması alındığında;

$\ln Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$ şeklini alır. Bu modelde, $Y_i^* = \ln Y_i$ tanımlarını yaparak parametreler tahmin edilmektedir. Bu modelde, eğim ($= \frac{dY}{dX} = \beta_2 Y$) ve esneklik ($= \frac{dY}{dX}\frac{X}{Y} = \beta_2 \overline{X}$) olarak bulunur. Modelde eğim katsayısı, açıklayıcı değişkendeki mutlak bir değişmeye karşılık açıklanan değişkendeki (Y'deki) göreli ya da oransal değişmeyi ölçmektedir.

Örnek 7.3. 2001-2013 yılları arasındaki Şekerpancarı verimine etki eden kullanılan gübre miktarları verilmiştir. İki değişken arasındaki ilişkinin yarı logaritmik bir ilişki olduğu varsayımı ile regresyon modelinin parametrelerini EKK yöntemi ile tahmin ediniz?

Çizelge 15. Türkiye'de Şekerpancarı Verimi, Gübre Kullanım Miktarları ve Hesap Değerleri

Yıl	Verim (10 kg/da)	Gübre (10 Kg/da)	$\ln Y_i = Y_i^*$
2001	354	1,0	5,86930
2002	444	1,1	6,09582
2003	401	1,2	5,99396
2004	429	1,0	6,06146
2005	452	1,3	6,11368
2006	446	1,4	6,10032
2007	415	1,1	6,02828
2008	482	1,2	6,17794
2009	533	1,3	6,27852
2010	545	1,2	6,30079
2011	548	1,5	6,30628
2012	532	1,4	6,27664
2013	566	1,5	6,33859

Y: Verim(10 Kg/da)
X: Gübre(10 Kg/da)
Kaynak: Türkiye İstatistik Kurumu, 2014.

Matris işlemleri ile çözüm yapıldığında,

$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$ bu formülden parametrelerin tahminine ulaşılır.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1,0 \\ 1 & 1,1 \\ 1 & 1,2 \\ 1 & 1,0 \\ 1 & 1,3 \\ 1 & 1,4 \\ 1 & 1,1 \\ 1 & 1,2 \\ 1 & 1,3 \\ 1 & 1,2 \\ 1 & 1,5 \\ 1 & 1,4 \\ 1 & 1,5 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 5,86930 \\ 6,09582 \\ 5,99396 \\ 6,06146 \\ 6,11368 \\ 6,10032 \\ 6,02828 \\ 6,17794 \\ 6,27852 \\ 6,30079 \\ 6,30628 \\ 6,27664 \\ 6,33859 \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki matrisler kullanılarak $X'X$ ve $X'Y$ matrisi hesaplanmıştır.

$$X'X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1{,}0 & 1{,}1 & 1{,}2 & 1{,}0 & 1{,}3 & 1{,}4 & 1{,}1 & 1{,}2 & 1{,}3 & 1{,}2 & 1{,}5 & 1{,}4 & 1{,}5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1{,}0 \\ 1 & 1{,}1 \\ 1 & 1{,}2 \\ 1 & 1{,}0 \\ 1 & 1{,}3 \\ 1 & 1{,}4 \\ 1 & 1{,}1 \\ 1 & 1{,}2 \\ 1 & 1{,}3 \\ 1 & 1{,}2 \\ 1 & 1{,}5 \\ 1 & 1{,}4 \\ 1 & 1{,}5 \end{bmatrix}$$

$$X'X = \begin{bmatrix} 13 & 16{,}20 \\ 16{,}20 & 20{,}54 \end{bmatrix}$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1,0 & 1,1 & 1,2 & 1,0 & 1,3 & 1,4 & 1,1 & 1,2 & 1,3 & 1,2 & 1,5 & 1,4 & 1,5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 5,86930 \\ 6,09582 \\ 5,99396 \\ 6,06146 \\ 6,11368 \\ 6,10032 \\ 6,02828 \\ 6,17794 \\ 6,27852 \\ 6,30079 \\ 6,30628 \\ 6,27664 \\ 6,33859 \end{bmatrix}$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} 79,94 \\ 99,84 \end{bmatrix}$$

$|A|$=0,218341

$$AdjA = \begin{bmatrix} 20,54 & -16,20 \\ -16,20 & 13 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 4,484716 & -3,53712 \\ -3,53712 & 2,838428 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$$

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 4,484716 & -3,53712 \\ -3,53712 & 2,838428 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 79,94 \\ 99,84 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 5,371537 \\ 0,624173 \end{bmatrix}$$

Buna göre logaritmik doğrusal regresyon denklemi,

$Y_i^* = 5,37 + 0,62 X_i^*$

veya

$Y_i = 5,37 + 0,62 \ln X_i$ şeklinde elde edilir. Bu modele göre, gübredeki bir birimlik değişme şekerpancarı verimini %62.42 artırmaktadır. Ortalama esneklik değeri ise,

$$E_{XY} = \frac{dY}{dX}\frac{X}{Y} = \beta_2 \overline{X} = (0,62)(1,246) = 0.79 \text{ olur.}$$

7.1.3. Ters Model

Bu model bağımsız değişken X'in tersi ve bağımlı değişken Y arasında ilişkiyi açıklamaktadır. Bu türden modellere ters model adı verilir.

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1\left(\frac{1}{X_i}\right) + u_i$$

Ters modelde, bağımsız değişken X modele ters yani 1/X şeklinde girdiğinden dolayı X değişkeninde doğrusal değildir. Ancak β_0 ve β_1 katsayılarında doğrusaldır diyebiliriz. Sonuç olarak, bu model doğrusal bir modeldir. Bu modellerin bir özelliği bağımsız değişkenin değeri sonsuza giderken bağımlı değişkenin yaklaştığı bir limit değeri içerir.

Yukarıdaki modelin eğimini $\frac{dY}{dX} = -\beta_1\left(\frac{1}{X^2}\right)$ şeklinde elde ederiz. Buradan esneklik ise,

$$E_{XY} = \frac{dY}{dX} * \frac{X}{Y} = -\beta_1\left(\frac{1}{X^2}\right)\left(\frac{X}{Y}\right) = -\beta_1 \frac{1}{\overline{X}\overline{Y}}$$ şeklinde elde edilir (Güriş ve Çağlayan, 2010) (Dikmen, 2012).

Örnek 7.4. 2001-2013 yılları arasındaki Şekerpancarı verimine etki eden kullanılan gübre miktarları verilmiştir. İki değişken arasındaki ilişkinin ters ilişki olduğu varsayımı ile regresyon modelinin parametrelerini EKK yöntemi ile tahmin ediniz?

Çizelge 16. Türkiye'de Şekerpancarı Verimi, Gübre Kullanım Miktarları ve Hesap Değerleri

Yıl	**Verim (10 kg/da)**	**Gübre (10 Kg/da)**	**$1/X_i$**
2001	354	1,0	1,00000
2002	444	1,1	0,90909
2003	401	1,2	0,83333
2004	429	1,0	1,00000
2005	452	1,3	0,76923
2006	446	1,4	0,71429
2007	415	1,1	0,90909
2008	482	1,2	0,83333
2009	533	1,3	0,76923
2010	545	1,2	0,83333
2011	548	1,5	0,66667
2012	532	1,4	0,71429
2013	566	1,5	0,66667

Y: Verim (10 Kg/da)
X_1: Gübre (10 Kg/da)
Kaynak: Türkiye İstatistik Kurumu, 2014.

Matris işlemleri ile çözüm yapıldığında,
$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$ formülünden parametrelerin tahminine ulaşılır.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1,00000 \\ 1 & 0,90909 \\ 1 & 0,83333 \\ 1 & 1,00000 \\ 1 & 0,76923 \\ 1 & 0,71429 \\ 1 & 0,90909 \\ 1 & 0,83333 \\ 1 & 0,76923 \\ 1 & 0,83333 \\ 1 & 0,66667 \\ 1 & 0,71429 \\ 1 & 0,66667 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 354 \\ 444 \\ 401 \\ 429 \\ 452 \\ 446 \\ 415 \\ 482 \\ 533 \\ 545 \\ 548 \\ 532 \\ 566 \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki matrisler kullanılarak, $X'X$ ve $X'Y$ matrisi hesaplanmıştır.

$$X'X=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1,00000 & 0,90909 & 0,83333 & 1,00000 & 0,76923 & 0,71429 & 0,90909 & 0,83333 & 0,76923 & 0,83333 & 0,66667 & 0,71429 & 0,66667\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}1 & 1,00000\\ 1 & 0,90909\\ 1 & 0,83333\\ 1 & 1,00000\\ 1 & 0,76923\\ 1 & 0,71429\\ 1 & 0,90909\\ 1 & 0,83333\\ 1 & 0,76923\\ 1 & 0,83333\\ 1 & 0,66667\\ 1 & 0,71429\\ 1 & 0,66667\end{bmatrix}$$

$$X'X=\begin{bmatrix}13 & 10,62\\ 10,62 & 8,828955\end{bmatrix}$$

$$X'Y=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1,00000 & 0,90909 & 0,83333 & 1,00000 & 0,76923 & 0,71429 & 0,90909 & 0,83333 & 0,76923 & 0,83333 & 0,66667 & 0,71429 & 0,66667\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}354\\ 444\\ 401\\ 429\\ 452\\ 446\\ 415\\ 482\\ 533\\ 545\\ 548\\ 532\\ 566\end{bmatrix}$$

$$X'Y=\begin{bmatrix}6147,00\\ 4952,84\end{bmatrix}$$

$$|A|=0,494352$$

$$AdjA=\begin{bmatrix}8,83 & -10,62\\ -10,62 & 13\end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1}=\begin{bmatrix}4,364613 & -5,2493\\ -5,2493 & 6,426578\end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta}=(X'X)^{-1}X'Y$$

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 4{,}364613 & -5{,}2493 \\ -5{,}2493 & 6{,}426578 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6147{,}00 \\ 4952{,}84 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 830{,}3244 \\ -437{,}651 \end{bmatrix}$$

Buna göre ters model,

$Y_i^* = 830{,}32 - 437{,}65 X_i^*$

veya

$Y_i = 830{,}32 - 437{,}65 * \dfrac{1}{X_i}$ şeklinde elde edilir. Ortalama esneklik ise,

$$E_{XY} = -\hat{\beta}_1 \frac{1}{\overline{X}\overline{Y}} = -(-437{,}65)\frac{1}{(472{,}85)(1{,}246)} = 0{,}743 \text{ olur.}$$

Buradan açıkça görüleceği gibi, verim değeri 830,32 kg/da, yani X sonsuza doğru büyüdükçe şekerpancarı verimindeki artış 830,32 (10kg/da)'dan büyük olamaz.

7.1.4. Kuadratik Model

Eğer değişkenler arasındaki bağlantı doğrusal değilse bu değişik özellikler arzetmektedir (Kılıçbay, 1965).

Bu modeli,

$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 + u_i$ şeklinde yazabiliriz. Burada Y bağımlı değişken, X bağımsız değişkendir. Kuadratik model parametrelerini dönüşüm yapmadan önce En Küçük Kareler Yöntemi ile de tahmin etmek mümkündür. Bu işlem biraz karmaşık bir hale dönüşebilir, parametre tahmincilerinin varyanslarını elde ederken bazı ölçülerin belirlenmesi sorunu ile karşılaşılabilir. Bunun için de ilgili değişkenler için dönüşüm yaparak tahmin daha kolay olabilecektir.

Dönüşüm işlemi bağımsız değişken X için,

$X_i^2 = X_i^*$ şeklinde yapılmış olsun. Dönüştürülmüş modelin son hali,

$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^* + u_i$ şeklinde olur. Artık, bu modelin tahmini ve testlerini yapabilmek mümkündür. Dönüştürülmüş kuadratik model, matris yöntemi ile çok kolay tahmin edilebilir. Bunun için, $X_i = X_1$ ve $X_i^* = X_2$ şeklinde düşünülmelidir. Çoklu doğrusal regresyon tahmini gibi parametre tahminleri, varyansları ve tüm testleri yapılabilir (Güriş ve Çağlayan, 2010).

Kuadratik modelimiz $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 + u_i$ için, Modelin eğimini $\frac{dY}{dX} = \beta_1 + 2\beta_2 X$ şeklinde elde ederiz. Buradan esneklik ise,

$E_{XY} = \frac{dY}{dX} * \frac{X}{Y} = (\beta_1 + 2\beta_2 X)\frac{X}{Y}$ olarak elde edilir. Modelin ortalama esnekliği ise,

$E_{XY} = \frac{dY}{dX} * \frac{X}{Y} = (\beta_1 + 2\beta_2 \overline{X})\frac{\overline{X}}{\overline{Y}}$ şeklinde elde edilir (Güriş ve Çağlayan, 2010).

Örnek 7.5. 2001-2013 yılları arasındaki Şekerpancarı verimine etki eden kullanılan gübre miktarları verilmiştir. İki değişken arasındaki ilişkinin tam logaritmik bir ilişki olduğu varsayımı ile regresyon modelinin parametrelerini EKK yöntemi ile tahmin ediniz.

Çizelge 17. Türkiye'de Şekerpancarı Verimi, Gübre Kullanım Miktarları ve Hesap Değerleri

Yıl	**Verim (10 kg/da)**	**Gübre (10 Kg/da)**	x^2
2001	354	1,0	1,00
2002	444	1,1	1,21
2003	401	1,2	1,44
2004	429	1,0	1,00
2005	452	1,3	1,69
2006	446	1,4	1,96
2007	415	1,1	1,21
2008	482	1,2	1,44
2009	533	1,3	1,69
2010	545	1,2	1,44
2011	548	1,5	2,25
2012	532	1,4	1,96
2013	566	1,5	2,25

Y: Verim(10 Kg/da)
X_1: Gübre(10 Kg/da)
Kaynak: Türkiye İstatistik Kurumu, 2014.

Matris işlemleri ile çözüm yapıldığında,

$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$ formülünden parametrelerin tahminine ulaşılır.

$$
X = \begin{bmatrix} 1 & 1,0 & 1,00 \\ 1 & 1,1 & 1,21 \\ 1 & 1,2 & 1,44 \\ 1 & 1,0 & 1,00 \\ 1 & 1,3 & 1,69 \\ 1 & 1,4 & 1,96 \\ 1 & 1,1 & 1,21 \\ 1 & 1,2 & 1,44 \\ 1 & 1,3 & 1,69 \\ 1 & 1,2 & 1,44 \\ 1 & 1,5 & 2,25 \\ 1 & 1,4 & 1,96 \\ 1 & 1,5 & 2,25 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 354 \\ 444 \\ 401 \\ 429 \\ 452 \\ 446 \\ 415 \\ 482 \\ 533 \\ 545 \\ 548 \\ 532 \\ 566 \end{bmatrix}
$$

Yukarıdaki matrisler kullanılarak, $X'X$ ve $X'Y$ matrisi hesaplanmıştır.

$$
X'X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1,0 & 1,1 & 1,2 & 1,0 & 1,3 & 1,4 & 1,1 & 1,2 & 1,3 & 1,2 & 1,5 & 1,4 & 1,5 \\ 1,00 & 1,21 & 1,44 & 1,00 & 1,69 & 1,96 & 1,21 & 1,44 & 1,69 & 1,44 & 2,25 & 1,96 & 2,25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1,0 & 1,00 \\ 1 & 1,1 & 1,21 \\ 1 & 1,2 & 1,44 \\ 1 & 1,0 & 1,00 \\ 1 & 1,3 & 1,69 \\ 1 & 1,4 & 1,96 \\ 1 & 1,1 & 1,21 \\ 1 & 1,2 & 1,44 \\ 1 & 1,3 & 1,69 \\ 1 & 1,2 & 1,44 \\ 1 & 1,5 & 2,25 \\ 1 & 1,4 & 1,96 \\ 1 & 1,5 & 2,25 \end{bmatrix}
$$

$$
X'X = \begin{bmatrix} 13 & 16,20 & 20,54 \\ 16,20 & 20,20 & 26,48 \\ 20,54 & 26,48 & 34,67 \end{bmatrix}
$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1,0 & 1,1 & 1,2 & 1,0 & 1,3 & 1,4 & 1,1 & 1,2 & 1,3 & 1,2 & 1,5 & 1,4 & 1,5 \\ 1,00 & 1,21 & 1,44 & 1,00 & 1,69 & 1,96 & 1,21 & 1,44 & 1,69 & 1,44 & 2,25 & 1,96 & 2,25 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 354 \\ 444 \\ 401 \\ 429 \\ 452 \\ 446 \\ 415 \\ 482 \\ 533 \\ 545 \\ 548 \\ 532 \\ 566 \end{bmatrix}$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} 6147,00 \\ 7762,20 \\ 9966,74 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -9,80424$$

$$AdjA = \begin{bmatrix} -0,67940 & -17,78616 & 13,98630 \\ -17,78616 & 28,81060 & -11,46600 \\ 13,98630 & -11,46600 & 0,19120 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,06930 & 1,81413 & -1,42656 \\ 1,81413 & -2,93859 & 1,16949 \\ -1,42656 & 1,16949 & -0,01950 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$$

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 0,06930 & 1,81413 & -1,42656 \\ 1,81413 & -2,93859 & 1,16949 \\ -1,42656 & 1,16949 & -0,01950 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 6147,00 \\ 7762,20 \\ 9966,74 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 289,48 \\ -2,39 \\ 114,43 \end{bmatrix}$$

Buna göre tahmin edilen kuadratik model,

$Y_i = 289,48 - 2,39X_i + 114,43X_i^2$ şeklinde olur.

Modelin ortalama esnekliği ise,

$$E_{XY} == (\hat{\beta}_1 + 2\hat{\beta}_2\overline{X})\frac{\overline{X}}{\overline{Y}} = [(-2,39 + 2(114,43)(1,246)]\frac{1,246}{472,846} = 0,75$$

olarak elde edilir.