koşulunu sağladığı halde rank koşulunu sağlayamaması sebebiyle belirlenemediği ortaya çıkmaktadır.

10.3. Eşanlı Denklem Yöntemleri

Birden çok denklemli ekonometrik modellerin parametrelerini tahmin edebilmek amacıyla kullanılan çeşitli yöntemler vardır. Bu yöntemlerden en fazla kullanılanları; tam belirlenme durumunda kullanılabilen "Dolaylı En Küçük Kareler Yöntemi" ile aşırı belirlenme halinde başvurulan "İki Aşamalı En Küçük Kareler Yöntemi" dir. Modeldeki denklem sayısı arttıkça uygulamada aşırı belirlenme durumuyla daha sık karşılaşılabilmektedir.

10.3.1. Dolaylı En Küçük Kareler Yöntemi

Modelin denklemlerinin tam belirlenmiş olması şartıyla bu yöntem kullanılabilir. Yönteme göre modeldeki parametrelerin değerini hesaplama işlemi üç aşamada gerçekleştirilir:

Birinci aşamada, yapısal modeldeki denklemler içsel değişkenlerin dışsal değişkenlerin birer fonksiyonu olarak yazılır ve böylece yapısal modelin indirgenmiş formu elde edilir (Özçelik, 1994).

Örnek 10.4. D:talep miktarı, S: Arz miktarı, P: Fiyat, Y: Gelir, W: İklim indeksi olan eşanlı denklem şöyle olsun.

$$D = a_0 + a_1 P + a_2 Y + u_1$$

$$S = b_0 + b_1 P + b_2 W + u_2$$

D=S

Yapısal modelde D, S ve P içsel, Y ve W dışsal değişkenlerdir. Ardı ardına yerine koymalar ile indirgenmiş model şöyle olur:

$$D = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{b_1 - a_1} + \frac{a_2 b_1}{b_1 - a_1} y + \frac{-a_1 b_2}{b_1 - a_1} w + u_1$$

$$P = \frac{a_0 - b_0}{b_1 - a_1} + \frac{a_2}{b_1 - a_1} y + \frac{-b_2}{b_1 - a_1} w + u_2$$

Bu yapısal modelin indirgenmiş halindeki katsayılar için π'ler kullanılırsa:

$$D = \pi_{10} + \pi_{11} Y + \pi_{12} W + V_1$$

$P = \pi_{20} + \pi_{21} Y + \pi_{22} W + V_2$ yazılır.

Burada;

$$\pi_{10} = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{b_1 - a_1}$$

$$\pi_{11} = \frac{a_2 b_1}{b_1 - a_1}$$

$$\pi_{12} = \frac{- a_1 b_2}{b_1 - a_1}$$

$$\pi_{20} = \frac{a_0 - b_0}{b_1 - a_1}$$

$$\pi_{21} = \frac{a_2}{b_1 - a_1}$$

$$\pi_{22} = \frac{- b_2}{b_1 - a_1}$$

$$V_1 = \frac{u_1 b_1 - v_2 a_1}{b_1 - a_1}$$

$$V_2 = \frac{u_1 - u_2}{b_1 - a_1}$$ olur.

İkinci aşamada, indirgenmiş kalıbın her bir denklemine en küçük kareler yöntemi uygulanarak indirgenmiş modelin katsayıları tahmin edilir (Koutsoyiannis, 1989). Örnekteki D, P, Y ve W'ye ait örnek gözlemleri kullanarak indirgenmiş kalıp denklemlerine birer birer en küçük kareler yöntemi tatbik edilerek katsayıları tahmin edilir (Özçelik, 1994).

Üçüncü aşamada, ikinci aşamada tahmin edilmiş olan indirgenmiş model parametreleri π 'ler kullanılarak katsayılar arası ilişkiler takımında π 'lerin yerine π 'ler konularak model yapısal parametreler (a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2) için çözülerek (Özçelik, 1994):

$$a_0 = \pi_{20} - (\frac{\pi_{10}}{\pi_{20}} - \frac{\pi_{12}}{\pi_{22}})$$

$$b_0 = \pi_{20} - (\frac{\pi_{10}}{\pi_{20}} - \frac{\pi_{11}}{\pi_{21}})$$

$$a_1 = \frac{\pi_{12}}{\pi_{22}}$$

$$b_1 = \frac{\pi_{11}}{\pi_{21}}$$

$$a_2 = \pi_{21} - (\frac{\pi_{11}}{\pi_{21}} - \frac{\pi_{12}}{\pi_{22}})$$

$$b_2 = \pi_{22} - (\frac{\pi_{12}}{\pi_{22}} - \frac{\pi_{11}}{\pi_{21}})$$ elde edilir.

10.3.2. İki Aşamalı En Küçük Kareler Yöntemi

İki aşamalı en küçük kareler yönteminde yapısal denklemin parametrelerinin tahmin değerlerini hesaplama süreci iki aşamayı kapsamaktadır. Daha önce de ifade edildiği gibi bu yöntem, aşırı belirlenme durumunda geçerlidir (Özçelik, 1994).

Birinci aşamada π tahminlerini bulmak için indirgenmiş kalıp denklemlerine en küçük kareler yöntemi uygulanır. Yani parametreleri tahmin edilecek yapısal denklemin sağ tarafındaki içsel değişkenlerin hata terimi ile olan ilişkilerini ortadan kaldırmak amacıyla, bu içsel değişkenlerin teker teker modelde önceden bilinen (dışsal) değişkenler üzerindeki regresyonu bulunur (Özçelik, 1994).

Modeldeki i. yapısal denklemin genel ifadesi;

$$Y_i = b_{i1}Y_1 + b_{i2}Y_2 + ... + b_{iG}Y_G + C_{i1}X_1 + ... + C_{ik}X_k + u$$ olsun.

Burada

Y_i içsel değişkenleri (i=1,2,….,G)

X_i dışsal değişkenleri (i=1,2,….,k)

b: İçsel değişkenlerin parametreleri

C: Dışsal değişkenlerin parametrelerini göstermektedir.

Yapısal modelin, indirgenmiş formunun denklemleri:

$$Y_1 = \pi_{11}X_1 + \pi_{12}X_2 + ... + \pi_{1k}X_k + V_1$$

$$Y_2 = \pi_{21}X_1 + \pi_{22}X_2 + ... + \pi_{2k}X_k + V_2$$

…………………………………….

…………………………………….

$$Y_G = \pi_{G1}X_1 + \pi_{G2}X_2 + ... + \pi_{Gk}X_k + V_G$$ dir (Koutsoyiannis, 1989).

Her denklemde ayrı ayrı en küçük kareler yöntemini uygulamak suretiyle bulacağımız indirgenmiş form parametrelerinin tahminleri olan π 'leri kullanarak içsel değişkenlerin tahminleri ($\hat{Y}_1, \hat{Y}_2, ..., \hat{Y}_G$) bulunur. İki aşamalı en küçük kareler yönteminde π 'ler kullanılarak, yapısal parametreler olan b ve c'ler tahmin edilmeyeceği için modeldeki tüm yapısal denklemlerdeki dışsal değişkenleri bilmekle ardışık yerine koymalar ile uğraşmadan indirgenmiş form modelinin genel bir gösterimi direkt olarak yazılabilir (Özçelik, 1994).

İkinci aşamada $\hat{Y}$'lar yapısal denklemlerde yerlerine konularak dönüştürülmüş fonksiyonlar elde edilir ve dönüştürülmüş yapısal denklemlere en küçük kareler yöntemi uygulanarak (İki aşamalı en küçük kareler tahminlerinin formülleri en küçük kareler yöntemininkiler ile aynıdır) yapısal parametrelerin İki aşamalı en küçük kareler tahminleri bulunur (Özçelik, 1994).

Bu aşamada, birinci aşamada hesaplanan içsel değişkenlerin teker teker modeldeki dışsal değişkenler üzerindeki regresyonları, içsel değişkenlerin orijinal değerleri yerine konularak yapısal denklemin parametreleri tahmin edilir (Özçelik, 1994).

$\hat{Y}$'ları yapısal denklemlerde yerine koyalım:

$$Y_i = b_{i1}\hat{Y}_1 + b_{i2}\hat{Y}_2 + ... + b_{iG}\hat{Y}_G + C_{i1}X_1 + ... + C_{ik}X_k + u_i^*$$

Burada;

$u_i^* = u_1 + b_{i1}v_1 + b_{i2}v_2 + ... + b_{iG}v_G$ dir.

i. inci yapısal denklemin yukarıda da verilen genel gösterilişi:

$Y_i = b_{i1}Y_1 + b_{i2}Y_2 + ... + b_{iG}Y_G + C_{i1}X_1 + ... + C_{ik}X_k + u$ şeklinde idi. Şimdi bu denklemdeki y_i'lerin yerine;

$$y_1 = \hat{y}_1 + v_1$$

$$y_2 = \hat{y}_1 + v_1$$

…………

…………

$y_G = \hat{y}_G + v_G$ ifadelerini koyarsak denklem şu duruma gelir:

$$Y_i = b_{i1}(\hat{Y}_1 + v_1) + b_{i2}(\hat{Y}_2 + v_2) + ... + b_{iG}(\hat{Y}_G + v_G) + C_{i1}X_1 + ... + C_{ik}X_k + u_i$$

Bu denklemi de yeniden düzenleyerek dönüştürülmüş fonksiyon şöyle elde edilir:

$$Y_i = b_{i1}\hat{Y}_1 + b_{i2}\hat{Y}_2 + ... + b_{iG}\hat{Y}_G + C_{i1}X_1 + ... + C_{ik}X_k + (u_i + b_{i1}v_1 + b_{i2}v_2 + ... + b_{iG}v_G)$$

İşte bu dönüştürülmüş yapısal denkleme en küçük kareler yöntemi uygulanarak, yapısal parametreler tahmin edilmektedir (Özçelik, 1994) (Koutsoyiannis, 1989).

Örnek 10.5. Piyasa dengesi, arz ve talep eğrilerinin kesiştiği ya da bu iki eğrinin birbirine eşitlendiği noktayı ifade etmektedir. Bu iki eğrinin kesiştiği noktaya karşılık gelen değer denge fiyatı, denge fiyatına karşılık gelen miktar ise denge miktarı olarak isimlendirilir. Piyasa denge modelini yazarak değişkenleri tanımlayınız?

Piyasa denge modelimizi şu şekilde ifade edelim:

$$Q_D = a_0 - a_1 P_t + a_2 Y_t + u_1$$
$$Q_S = b_0 + b_1 P_t + a_2 P_{t-1} + u_2$$
$$Q_D = Q_S$$

Burada;
Q_D: Talep miktarı
Q_S: Arz miktarı
P_t: t dönemi fiyatı
P_{t-1}: t-1 döneminde fiyat
Y_t: Gelir

Yukarıdaki eşanlı denklem modelinde piyasa fiyatı arz ve talebe göre belirlenmekte olup, Q_D, Q_S, P_t içsel değişkenlerdir. Y_t dışsal değişkeni, P_{t-1} ise gecikmeli dışsal değişkeni ifade eder.

Örnek 10.6. Aşağıdaki modellere bakarak davranış denklemi, tanım denklemi kavramlarını belirtiniz.

$C_t = a_0 + a_1 Y_t + u_t$ (Model 1)
$Y_t = C_t + I_t$ (Model 2)

Burada,
Model 1 davranış denklemidir çünkü parametreler ve hata terimi modelde yer almıştır. Model 2 ise davranış denklemidir çünkü tüketim (C_t) değişkeninin bileşenleri model içerisinde yer almıştır.

Örnek 10.7. Bir piyasada A malının arz ve talep dengesi aşağıda verilmiştir. Bu dengeyi gösteren eşanlı modelin yapısal katsayılarını tahmin ediniz?

Çizelge 41. Bir Piyasada A Malının Arz, Talep, Fiyat, Gelir ve Tüketim Değerleri

D (Ton)	S (Ton)	P (TL/Kg)	Y (TL)	C (TL)
12	12	8	18	3
14	14	8	23	5
18	18	6	23	4
18	18	6	33	6
23	23	5	33	6
22	22	5	38	8
28	28	4	42	6
33	33	3	42	8
35	35	3	38	8
45	45	3	28	7

$$D = \beta_0 + \beta_1 P + \beta_2 Y + u_{1t}$$
$$S = \alpha_0 + \alpha_1 P + \alpha_2 C + u_{2t}$$
$$D=S$$

Eşanlı denklem sisteminde üç denklem, üç tane içsel değişken mevcuttur. İçsel değişkenler D, S ve P değişkenleridir. Yine, iki tane dışsal değişken Y ve C bulunmaktadır.

Eşanlı denklem sisteminde,

G: Toplam denklem sayısı : 3

K: Toplam değişken sayısı : 5

M: İncelenen denklemin değişken sayısı : 3 (1. denklem)

K-M = G-1

5-3=3-1

2=2 olduğu içi denklem tam belirlenmiştir.

İndirgenmiş kalıp modellerinde, içsel değişkenlerin yalnızca dışsal değişkenlerin birer fonksiyonu olarak ifade edilir.

Birinci aşamada, modelin indirgenmiş kalıp denklemleri aşağıdaki gibi oluşturulur:

$$D = \frac{\beta_0\alpha_1 - \beta_1\alpha_0}{\alpha_1 - \beta_1} + \frac{\beta_2\alpha_1}{\alpha_1 - \beta_1} Y + \frac{-\beta_1\alpha_2}{\alpha_1 - \beta_1} C + v_1$$

$$P = \frac{\beta_0 - \alpha_0}{\alpha_1 - \beta_1} + \frac{\beta_1}{\alpha_1 - \beta_1} Y + \frac{-\alpha_2}{\alpha_1 - \beta_1} C + v_2$$

Buradan indirgenmiş kalıp denklemlerini π'lere göre yazalım.

$$D = \pi_1 + \pi_2 Y + \pi_3 C + v_1$$
$$P = \pi_4 + \pi_5 Y + \pi_6 C + v_2$$

olur.

Buradan yeniden düzenleme yapıldığında,

$$\pi_1 = \frac{\beta_0\alpha_1 - \beta_1\alpha_0}{\alpha_1 - \beta_1}, \pi_2 = \frac{\beta_2\alpha_1}{\alpha_1 - \beta_1}Y, \pi_3 = \frac{-\beta_1\alpha_2}{\alpha_1 - \beta_1}C$$
$$\pi_4 = \frac{\beta_0 - \alpha_0}{\alpha_1 - \beta_1}, \pi_5 = \frac{\beta_1}{\alpha_1 - \beta_1}Y, \pi_6 = \frac{-\alpha_2}{\alpha_1 - \beta_1}C$$

sonucuna ulaşılır.

Yukarıda verilmiş Çizelge değerlerine göre indirgenmiş kalıp denklemi parametreleri olan π'lerin En Küçük Kareler (EKK) Yöntemi ile tahminlerini yapmak mümkündür.

Bir sonraki aşamada ise, yapısal kalıp katsayılarını hesaplayabiliriz. Bunun için de indirgenmiş kalıp katsayıları ve yapısal kalıp katsayıları arasındaki ilişkiden yararlanabiliriz.

$$D = 0{,}87 - 0{,}28Y + 5{,}38C \qquad R^2 = 0{,}51$$
$$P = 11{,}01 - 0{,}06Y - 0{,}64C \qquad R^2 = 0.68$$

Daha sonraki aşamada, yapısal kalıp parametreleri ve indirgenmiş kalıp parametreleri arasındaki ilişkiden hareketle,

$$\beta_0 = \pi_4\left(\frac{\pi_1}{\pi_4} - \frac{\pi_3}{\pi_6}\right)\alpha_0 = \pi_4\left(\frac{\pi_1}{\pi_4} - \frac{\pi_2}{\pi_6}\right)$$
$$\beta_1 = \frac{\pi_3}{\pi_6}\alpha_1 = \frac{\pi_2}{\pi_5}$$
$$\beta_2 = \pi_5\left(\frac{\pi_2}{\pi_5} - \frac{\pi_3}{\pi_6}\right)\alpha_2 = \pi_6\left(\frac{\pi_3}{\pi_6} - \frac{\pi_2}{\pi_5}\right)$$

α ve β değerleri hesaplanabilir. Modellerden değerler, eşitliklerde yerine konulduğunda aşağıdaki hesaplamalar yapılacaktır.

$$\beta_0 = \pi_4\left(\frac{\pi_1}{\pi_4} - \frac{\pi_3}{\pi_6}\right) = 11{,}01 * \left(\frac{0{,}87}{11{,}01} - \frac{5{,}38}{-0{,}64}\right) = 93{,}69$$
$$\beta_1 = \frac{\pi_3}{\pi_5} = \frac{5{,}38}{-0{,}06} = -8{,}43$$
$$\beta_2 = \pi_5\left(\frac{\pi_2}{\pi_5} - \frac{\pi_3}{\pi_6}\right) = -0{,}06 * \left(\frac{-0{,}28}{-0{,}06} - \frac{-5{,}38}{-0{,}64}\right) = -0{,}81$$
$$\alpha_0 = \pi_4\left(\frac{\pi_1}{\pi_4} - \frac{\pi_2}{\pi_5}\right) = 11{,}01 * \left(\frac{0{,}87}{11{,}01} - \frac{-0{,}28}{-0{,}06}\right) = -47{,}90$$
$$\alpha_1 = \frac{\pi_2}{\pi_5} = \frac{-0{,}28}{-0{,}06} = -4{,}43$$
$$\alpha_2 = \pi_6\left(\frac{\pi_3}{\pi_6} - \frac{\pi_2}{\pi_5}\right) = -0{,}64 * \left(\frac{5{,}38}{-0{,}64} - \frac{-0{,}28}{-0{,}06}\right) = 8.20$$
$$D = 93{,}69 - 8{,}43Y - 0.81C$$
$$S = -47{,}90 + 4{,}43P + 8{,}20C$$

olarak tahmin edilmiş olup, parametreler (eşanlı modelde) iktisadi teori beklentilerine uygun olarak elde edilmiştir.