# DEĞİŞKENLERE AYIRMA YÖNTEMİ

$L(u) = 0,\ x$ ve $y$ bağımsız değişkenlerini içeren ve $B(u) = 0$ sınır koşulunu sağlayan homogen kısmi türevli denklem olmak üzere, bu denklemin

$$u(x, y) = X(x)\,Y(y)$$

şeklindeki $u$ çözümlerinin arandığı varsayılsın. Yöntem çalışırsa, $u$ için olan bu formül $L(u) = 0$ denkleminde yerine konulduğunda, denklemin bir tarafı sadece $x$ değişkenlerini, diğer tarafı da sadece $y$ değişkenlerini içerek şekilde, terimler yeniden düzenlenebilir. Yani, $P(x) = Q(y)$ gibi. $x$ ve $y$ ler bağımsız olduğundan, sadece $x$ veya $y$ ye bağlı olan bir nicelik sabit olmalıdır. Böylece, $P(x) = c$ ve $Q(x) = c$ olur ve bu denklemler, çarpımları $u$ olan $X$ ve $Y$ fonksiyonları için adi diferensiyel denklem olacaktır. Bu denklemler $X$ ve $Y$ üzerindeki sınır koşuluna göre çözülebilirler. Bu koşullar da, $u$ üzerindeki ilk koşuldan elde edilirler. Böylece, $c$ sabitinin değişimi ile bütün çözümler ailesi elde edilir. Süperpozisyon ilkesinden, bunların tüm lineer birleşimleri de bir çözümdür. Eğer, problem bir adi diferensiyel denkleme indirgeniyorsa bu çözülebilmelidir. Birinci basamaktan denklemler için durum çok basittir:

$$f' = af \Longrightarrow f(x) = ce^{ax}.$$

İkinci basamaktan denklemlerdeki durum, aşağıdaki gibi verilir:

$f'' + af' + bf = 0$ *denkleminin kökleri* $r_1,\ r_2$ *ve* $c_1,\ c_2$ *keyfi sabitler olmak üzere,* $f(x) = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$ *şeklindedir.* $r_1 = r_2$ *ise genel çözüm* $(c_1 + c_2x)\ e^{r_1x}$ *şeklindedir.* Burada $r_1$ ve $r_2$ kompleks olabilir. Bazı durumlarda, çözümün trigonometrik veya hiperbolik fonksiyonlar cinsinden ifade edilmesi daha uygundur. Özellikle; eğer $r_1 = \rho + i\sigma$ ve $r_2 = \rho - i\sigma$ ise genel çözüm

$$e^{\rho x}\left(c_1 \cos \sigma x + c_2 \sin \sigma x\right)$$

seklindedir. Eğer $\alpha > 0$ ise $f'' + \alpha^2 f' = 0$ denkleminin genel çözümü

$$c_1 \cos \alpha x + c_2 \sin \alpha x$$

ve $f'' - \alpha^2 f' = 0$ denkleminin genel çözümü

$$c_1 \cosh \alpha x + c_2 \sinh \alpha x$$

olur.

**1.1. ÖRNEK.** 1-*boyutlu ısı akışı problemi ele alınsın. Uzunluğu* $l$ *olan dairesel metal bir çubuğun eğri yüzeyi yalıtılmış olsun. Bu durumda, ısı,* *sadece uçlardan girer veya çıkar. Ayrıca, iki ucunun da sıfır derecede tutulduğu varsayılsın. Başlangıç koşulları göz ardı edilerek, aşağıdaki gibi bir sınır değer problemi yazılabilir:*

$$\begin{aligned} u_t &= ku_{xx}, \\ u(0,t) &= u(l,t) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

*Eğer* $u(x,t) = X(x)T(t)$ *(1) de yerine yazılırsa*

$$X(x)T'(t) = kX''(x)T(t) \tag{2}$$

$$X(0)T(t) = X(l)T(t) = 0 \tag{3}$$

*bulunur. (2) deki değişkenler, iki tarafın* $kX(x)T(t)$ *ile bölünmesi ile ayrılabilirler. Yani*

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

*olur. Bu durumda, sol taraf sadece* $t$ *ye, sağ taraf sadece* $x$ *e bağlı duruma geldi. Bunlar eşit olduğundan, ikisi de bir* $A$ *sabitine eşit olmalıdır. Yani*

$$T'(t) = AkT(t), \ X''(x) = AX(x).$$

*Bunlar da, temel yöntemlerle çözülebilen,* $T$ *ve* $X$ *için adi diferensiyel denklemlerdir.* $T$ *için olan denklemin genel çözümü*

$$T(t) = c_0 e^{Akt}$$

$X$ *için olan denklemin genel çözümü*

$$X(x)\, c_1 \cos\lambda x + c_2 \sin\lambda x, \quad \lambda = \sqrt{-A} \tag{4}$$

*olur. Şimdi, (3) sınır koşulları dikkate alınmalıdır.* $X(0) = 0$ *koşulu (4) de* $c_1 = 0$ *verir ve* $X(l) = 0$ *koşulu,* $c_2 \sin\lambda l = 0$ *verir. Eğer* $c_2 = 0$ *alınırsa* $u(x,t) \equiv 0$ *olur. Aşikar olmayan çözüm aranması gerekir, böylece* $c_2 \neq 0$ *olmalıdır. Buradan,* $\sin\lambda l = 0 \Rightarrow \lambda l = n\pi,\ C$*; veya* $A = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 < 0$ *demektir.* $n > 0$ *alınabilir, çünkü* $n = 0$ *durumu sıfır çözümünü verir,* $n$ *yerine* $-n$ *alınarak* $c_2$ *yerine* $-c_2$ *yi verir. Kısaca, her* $n \in \mathbb{N}$ *için (1) in bir* $u_n(x,t)$ *çözümü elde edilir:*

$$u_n(x,t) = e^{-\frac{n^2\pi^2 kt}{l^2}} \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N},$$

*olur (burada,* $c_0 = c_2 = 1$ *alındı.* $c_0$ *ve* $c_2$ *nin diğer seçimleri* $u_n$ *nin sabit çarpanlarını verir).* $u_n$ *lerin lineer kombinasyonları alınıp, daha sonra sonsuz lineer kombinasyonlara, yani*

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{n^2\pi^2 kt}{l^2}} \sin\frac{n\pi x}{l} \tag{5}$$

*sonsuz seriye geçilerek daha fazla çözümler elde edilir. Böyle serilerin yakınsaklığı incelenmek zorundadır. Bu sorunla daha sonra ilgilenilecektir. Son olarak, başlangıç koşulları devreye sokulursa; $f$ $(0,l)$ aralığında tanımlı, verilen bir fonksiyon olmak üzere, (1) denklemi $u(x,0)=f(x)$ başlangıç koşuluna göre çözülebilir. (5) çözümü*

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{l} \tag{6}$$

*olmak üzere, bunu sağlar. Böylece, (6) daki serilerin özellikleri ile ilgilenilmelidir.*

**1.2. ÖRNEK**. *Önceki örnekteki gibi ısı akışı problemi ele alınsın, bu sefer, çubuğun uç noktaları yalıtılmış olsun. Böylece, (1) yerine*

$$\begin{aligned} u_t &= ku_{xx}, \\ u_x(0,t) &= u_x(l,t)=0. \end{aligned} \tag{7}$$

*problemi ele alınırsa, (1) in çözümündeki teknik, burada da kullanılabilir, buradaki tek fark, (3) deki koşulların yerine*

$$X'(0)=X'(l)=0 \tag{8}$$

*gelir. Buradan, (4) $c_2=0$ ve $\lambda l=n\pi$ olur:*

$$\begin{aligned} X'(x) &= -\lambda c_1 \sin\lambda x+\lambda c_2\cos\lambda x, \\ X'(0) &= X'(l)=0 \Longleftrightarrow \lambda c_2=0 \\ X'(l) &= -\lambda c_1\sin\lambda l=0 \Leftrightarrow \lambda l=n\pi,\ n\in\mathbb{N}. \end{aligned}$$

*Yine $n\geq 0$ alınabilir çünkü, $\cos\frac{n\pi x}{l}=\cos\left(-\frac{n\pi x}{l}\right)$ ancak burada $n=0$ dahil olur. Buradan, çözümlerin dizisi*

$$u_n(x,t)=e^{-\frac{n^2\pi^2kt}{l^2}}\cos\frac{n\pi x}{l},\quad (n=0,1,2,...)$$

*olarak bulunur. Bunların kombinasyonu ile*

$$u=\sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n=\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\frac{n^2\pi^2kt}{l^2}}\cos\frac{n\pi x}{l}$$

*serisi oluşturulur. Bu seri, $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l}$ olmak üzere, (7) problemini, $u(x,0)=f(x)$ başlangıç koşuluna göre çözer. Böylece, bir başka seri açılım problemine ulaşılmış olur.*