4.1. TEOREM. *(Bessel Eşitsizliği) f, $2\pi-$periyodik ve $[-\pi,\pi]$ üzerinde Riemann integrallenebilen bir fonksiyon ve $c_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, e^{-in\theta} d\theta$ Fourier katsayıları olsun. Bu durumda,*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2\, d\theta$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat. Kompleks sayıların modülü tanımı kullanılarak aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$\begin{aligned}\left| f(\theta) - \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\theta} \right|^2 &= \left(f(\theta) - \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\theta} \right) \left(\overline{f(\theta)} - \sum_{n=-N}^{N} \overline{c_n} e^{-in\theta} \right) \\ &= |f(\theta)|^2 - \sum_{n=-N}^{N} \left[c_n \overline{f(\theta)} e^{in\theta} + \overline{c_n} f(\theta)\, e^{-in\theta} \right] \\ &\quad + \sum_{m,n=-N}^{N} c_m \overline{c_n} e^{i(m-n)\theta}.\end{aligned}$$

Bu eşitliğin iki tarafı 2π ile bölünüp, $-\pi$ den π ye integre edilirse, gerekli düzenlemeler ile,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| f(\theta) - \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\theta} \right|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2\, d\theta - \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2$$

bulunur. Son eşitliğin sol tarafındaki integral negatif olmayandır. Böylece,

$$0 \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2\, d\theta - \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2$$

olur. $N \to \infty$ için limite geçilirse istenen sonuca ulaşılır.

4.2. UYARI.

1.

$$a_0 = 2c_0,\ a_n = c_n + c_{-n} \ \textit{ve}\ b_n = i\left(c_n - c_{-n}\right)$$

bağıntıları kullanılarak Bessel eşitsizliği, a_n ve b_n katsayıları cinsinden aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{1}{4}\left|a_0\right|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|a_n\right|^2 + \left|b_n\right|^2\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|c_n\right|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(\theta\right)\right|^2 d\theta$$

2. *a_n, b_n ve c_n Fourier katsayıları $n \to \infty$ iken (ve c_n durumunda $n \to -\infty$ iken) sıfıra gider.*

YAKINSAKLIK

Bu bölümde, f üzerindeki bazı genel koşullar altında f nin Fourier serisinin f ye yakınsaklığı incelenecektir. Önce, üzerinde çalısılacak olan fonksiyon sınıfları verilecektir.

4.3. TANIM. *(Parçalı sürekli fonksiyon) $-\infty < a < b < \infty$ olsun. Eğer*

(i) f, $[a,b]$ üzerinde belki sonlu sayıdaki $x_1, ..., x_k$ noktaları hariç sürekli,

(ii) her bir $x_1, ..., x_k$ noktasında, f nin tek taraflı limitleri

$$f\left(x_j-\right) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f\left(x_j - h\right) \text{ ve } f\left(x_j+\right) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f\left(x_j + h\right)$$

varsa, f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde parçalı süreklidir denir (uç noktalarda tek taraflı limitler vardır). Yani, eğer f, $[a,b]$ üzerinde sonlu sayıdaki sıçrama noktaları hariç sürekli ise, parçalı süreklidir. $[a,b]$ üzerinde parçalı sürekli fonksiyonların sınıfı $PS\left(a,b\right)$ ile gösterilsin.

4.4. TANIM. *(Parçalı düzgün fonksiyon) Eğer bir f fonksiyonu ve onun birinci basamaktan türevi f' $[a,b]$ üzerinde parçalı sürekli iseler, f ye $[a,b]$ üzerinde parçalı düzgündür denir.*

4.5. TANIM. *$[a,b]$ üzerinde parçalı düzgün fonksiyonların sınıfı $PD\left(a,b\right)$ ile gösterilsin. Böylece, $f \in PD\left(a,b\right)$ olması için gerek ve yeter koşul*

(i) $f \in PS\left(a,b\right)$,

(ii) *f' var ve (a,b) üzerinde, belki sonlu sayıdaki $x_1,...,x_k$ noktaları (bunlar, f nin süreksiz olduğu noktaları da kapsayabilir) hariç, sürekli ve $f'(x_j-)$, $f'(x_j+)$, $j=1,...,k$ ve $f'(a+)$ ve $f'(b-)$ tek taraflı limitlerin var olmasıdır. Eğer f, $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı ve her $[a,b]$ sınırlı aralığında parçalı sürekli veya parçalı düzgün ise f ye $\mathbb{R}$ de parçalı sürekli, veya parçalı düzgündür denir. $\mathbb{R}$ de parçalı sürekli ve parçalı düzgün fonksiyonların sınıfı, sırasıyla $PS(\mathbb{R})$ ve $PD(\mathbb{R})$ ile gösterilsin.*

Ayrıca, $C[-\pi,\pi] := \{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ 2\pi-\text{periyodik, sürekli}\}$ olsun.

4.6. ÖRNEK.

(i) $f\in C^1[a,b]$ ise f $[a,b]$ üzerinde parçalı düzgündür.

(ii) $f(x)=\left\{\begin{array}{ll} 2x, & 0\le x\le \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}<x\le 1 \end{array}\right\}$ fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde parçalı düzgündür.

(iii) $f(x)=|x|$ $[-\pi,\pi]$ üzerinde sürekli ve parçalı düzgündür.

(iv) $f(x)=\sqrt{|x|}$ $[-\pi,\pi]$ üzerinde sürekli fakat parçalı düzgün değildir.