# DIRICHLET ÇEKİRDEĞİ

$2\pi-$periyodik integrallenebilen bir $f$ fonksiyonunun Fourier serisinin $N$ nci kısmi toplamı

$$\begin{aligned} S_N(f)(\theta) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \\ &= \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\theta} \end{aligned} \tag{1}$$

olur. Burada, $N \to \infty$ iken $S_N(f)$ dizisinin $f$ ye yaklaşımının araştırılması amaçlanmaktadır.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta, \\ c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta \end{aligned}$$

formülleri (1) de yerine konularak (örneğin $c_n$ için)

$$S_N(f)(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta+\varphi) e^{in\varphi} d\varphi$$

bulunur. Burada

$$D_N(\varphi) := \sum_{n=-N}^{N} e^{in\varphi} \quad (\varphi \in \mathbb{R}) \tag{2}$$

alınarak, kısaca

$$S_N(f)(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta+\varphi) D_N(\varphi) d\varphi \tag{3}$$

yazılır. $D_N(\varphi)$ fonksiyonuna $N$ *nci Dirichlet çekirdeği* denir. $D_N(\varphi)$ nin fonksiyon olarak ifadesi aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned} D_N(\varphi) &= \left\{e^{-iN\varphi} + ... + e^{-i\varphi} + 1 + e^{i\varphi} + ... + e^{iN\varphi}\right\} \\ &= e^{-iN\varphi}\left\{1 + e^{i\varphi} + ... + e^{2iN\varphi}\right\} \\ &= e^{-iN\varphi}\sum_{n=0}^{2N} e^{in\varphi}. \end{aligned}$$

Buradan, $\varphi \neq 0$ için

$$\begin{aligned} D_N(\varphi) &= e^{-iN\varphi}\sum_{n=0}^{2N}\left(e^{i\varphi}\right)^n \\ &= e^{-iN\varphi}\frac{e^{i(2N+1)\varphi} - 1}{e^{i\varphi} - 1} \\ &= \frac{e^{i(N+1)\varphi} - e^{-iN\varphi}}{e^{i\varphi} - 1} \end{aligned} \tag{4}$$

bulunur. Pay ve payda $e^{-i\frac{\varphi}{2}}$ çarpılarak

$$D_N(\varphi) = \frac{e^{i\left(N+\frac{1}{2}\right)\varphi} - e^{-i\left(N+\frac{1}{2}\right)\varphi}}{e^{i\frac{\varphi}{2}} - e^{-i\frac{\varphi}{2}}} = \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi} \tag{5}$$

elde edilir. (3) ve (5) den $f$ nin Fourier serisinin $N$ nci kısmi toplamı,

$$S_0(f) = \frac{a_0}{2}$$

ve $N \geq 1$ için

$$S_N(f)(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta+\varphi)\,\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}d\varphi$$

olarak yazılabilir.

**5.1. ÖRNEK.** *(2) formülünden, $D_n$ Dirichlet çekirdeğinin*

$$D_n(\varphi) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos k\varphi, \quad \varphi \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$$

*şeklinde, $n$ nci dereceden, çift bir trigonometrik polinom olduğu elde edilir.*

**5.2. LEMMA**. *Herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(\varphi)\,d\varphi = 1$$

*gerçeklenir.*

*İspat*. (2) formülünden, ispat kolayca elde edilir.

Böylece $D_n(t)$ Dirichletçekirdeği, sürekli devam ettirilirse,

$$D_n(t) = \begin{cases} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}, & t \neq 2k\pi \\ 2n+1, & t = 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

şeklinde yazılabilir.

(3) formülü ve 5.2. Lemmadan, aşağıdaki sonuç elde edilir:

**5.3. SONUÇ**.

$$S_n(1)(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}\,d\varphi = 1.$$