14.1. TEOREM. *$f \in C[-\pi,\pi]$ ise*

$$\lim_{r\to 1^-} \|P_r(f) - f\|_C = 0$$

gerçeklenir.

İspat. $\varepsilon > 0$ verilsin. Poisson çekirdeğinin özelliklerinden,

$$\begin{aligned}
|P_r(f)(\theta) - f(\theta)| &\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}\,|f(x)-f(\theta)|\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{|x-\theta|<\delta} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}\,|f(x)-f(\theta)|\,dx \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{|x-\theta|\ge\delta} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}\,|f(x)-f(\theta)|\,dx
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. $f \in C[-\pi,\pi]$ olduğundan, $\mathbb{R}$ de düzgün süreklidir; yani, verilen $\varepsilon > 0$ için, bir $\delta > 0$ sayısı;

$$|x-\theta| < \delta \text{ iken } |f(x)-f(\theta)| < \varepsilon$$

sağlanacak şekilde bulunabilir. Böylece, son ifadenin sağındaki ilk terimden

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_{|x-\theta|<\delta} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}\,|f(x)-f(\theta)|\,dx \\
&< \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{|x-\theta|<\delta} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}\,|f(x)-f(\theta)|\,dx \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

bulunur. İkinci terimden, f nin $\mathbb{R}$ de sınırlılığı kullanılarak,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_{|x-\theta|\ge\delta} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}\,|f(x)-f(\theta)|\,dx \qquad (1) \\
&\le \frac{2\|f\|}{2\pi}\int_{|x-\theta|\ge\delta} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}\,dx
\end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan, $(1-r)^2 = 1-2r+r^2 \geq 0$ ve buradan $r^2+1 \geq 2r$ olduğundan

$$1-2r\cos(x-\theta)+r^2 \geq 2r-2r\cos(x-\theta)$$

yazılabilir. cos fonksiyonu $[0,\pi]$ üzerinde azalan olduğundan $\delta \leq |x-\theta| \leq \pi$ iken $\cos\delta \geq \cos(x-\theta)$ olup, böylece, yukarıdaki eşitsizlikten

$$1-2r\cos(x-\theta)+r^2 \geq 2r(1-\cos\delta)$$

elde edilir. Bu son eşitsizlik kullanılarak, her $x,\theta,\ \delta \leq |x-\theta| \leq \pi$ için (1) den

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|x-\theta|\geq\delta} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}\,|f(x)-f(\theta)|\,dx \leq \frac{\|f\|(1-r^2)}{r(1-\cos\delta)}$$

bulunur. $r<1$ iken, her θ için

$$|P_r(f)(\theta)-f(\theta)| < 2\varepsilon$$

olur.

14.2. ÖDEV. *14.1. Teoremini kullanarak, her $\varepsilon>0$ her $f \in C[-\pi,\pi]$ için*

$$|f(\theta)-p(\theta)| < \varepsilon$$

eşitsizliği her θ için sağlanacak şekilde bir $p(\theta)$ trigonometrik polinomunun var olacağını gösteriniz.

14.3. UYARI. $P_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}$ $(t \in \mathbb{R})$ Poisson çekirdeği bir deltasal çekirdek olduğundan, 12.4.Teoremden aşağıdaki sonuç elde edilir:

$f \in L^1_{2\pi}$ için

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \|P_r(f)-f\|_{L^1_{2\pi}} = 0$$

gerçeklenir.

14.3. ÖDEV. *Her $\theta \in \mathbb{R}$ için, $P_r(f)(\theta)$ harmoniklik koşunu sağlar*

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}P_r(f)(\theta)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}P_r(f)(\theta)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}P_r(f)(\theta)=0, \quad (0<r<1)$$

Ayrıca, $r=0$ iken $P_r(f)(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$ olur.

Böylece 14.1. Teorem ile birlikte Birim dairede Dirichlet probleminin çözümü $P_r(f)(\theta)$ $(\theta \in \mathbb{R},\ 0 \leq r < 1)$ile bulunur.