KLASİK FRAKTALLAR, FRAKTAL ÖZELLİKLERİ VE BOYUT

(CLASSICAL FRACTALS, FRACTAL PROPERTIES AND DIMENSION)

KENDİNE BENZERLİK VE AFİNİTE (SELF SIMILARITY AND AFFINITY)

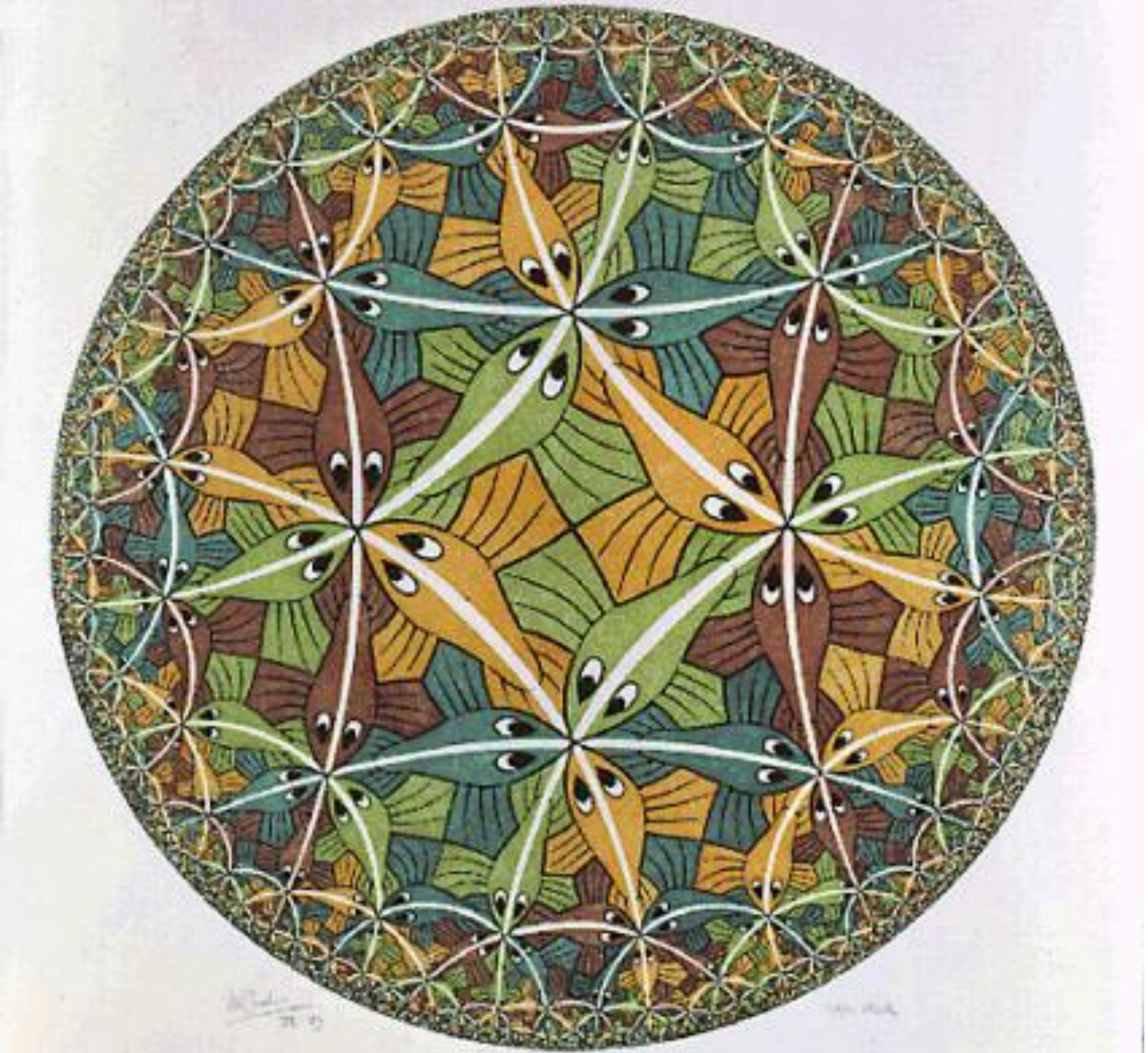
Mandelbrot tarafından yapılan alternatif fraktal tanımı:

«Bir fraktal bütüne benzeyen parçalardan oluşan şekildir.»

Arka Fonda kendine benzer fraktal yapılar gösteren brokolinin

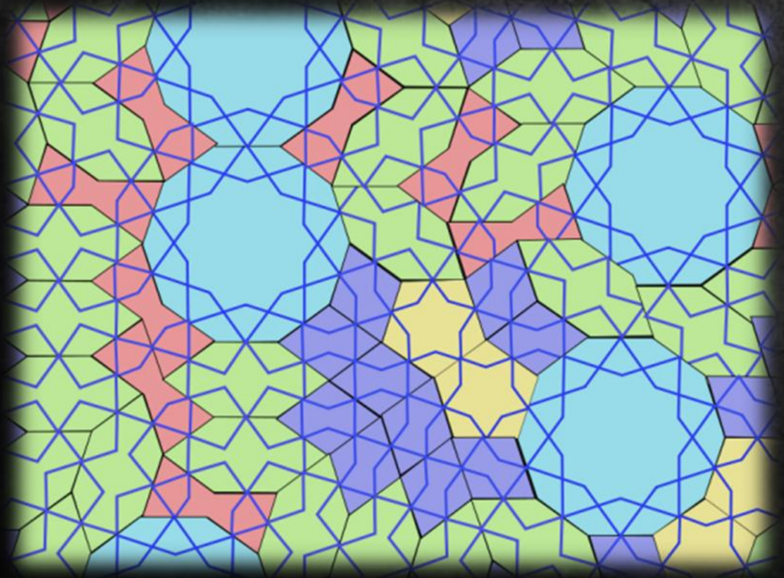
büyütülmüş halini görüyorsunuz.

Şekli oluşturan parçalar birbirine ve dolayısı ile şeklin tamamına benzerdir. Buna göre benzerliği, kopyalar olarak da düşünebiliriz.

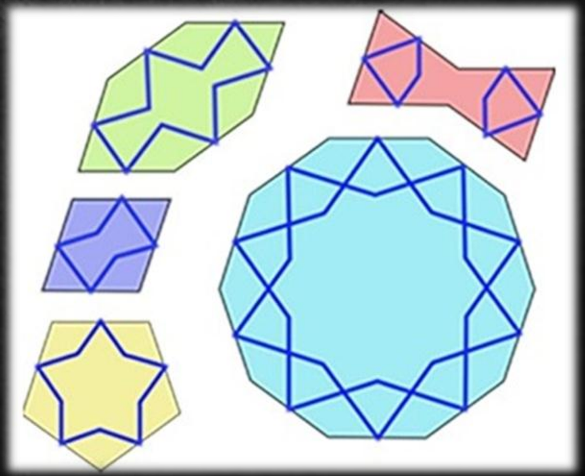


Yan tarafta, bir önceki şeklin içinde bulunan desenin orijinal halini görüyorsunuz. Esher tarafından yapılan *Circle Limit III* adlı bu eser ; Mandelbrot’un çalışmalarından 20 yıl önce yapılmıştır. Şekilde yinelenen kendine benzer bir yapı görüyorsunuz. Esher’in bu yorumu aslında evrenin düşünülen geometrisini güzel bi şekilde temsil etmektedir.

Burada da ünlü ressam Salvador Dali’nin, kendine benzeyen fraktal yapının açıkça görüldüğü sürrealist çalışmasını görüyorsunuz.

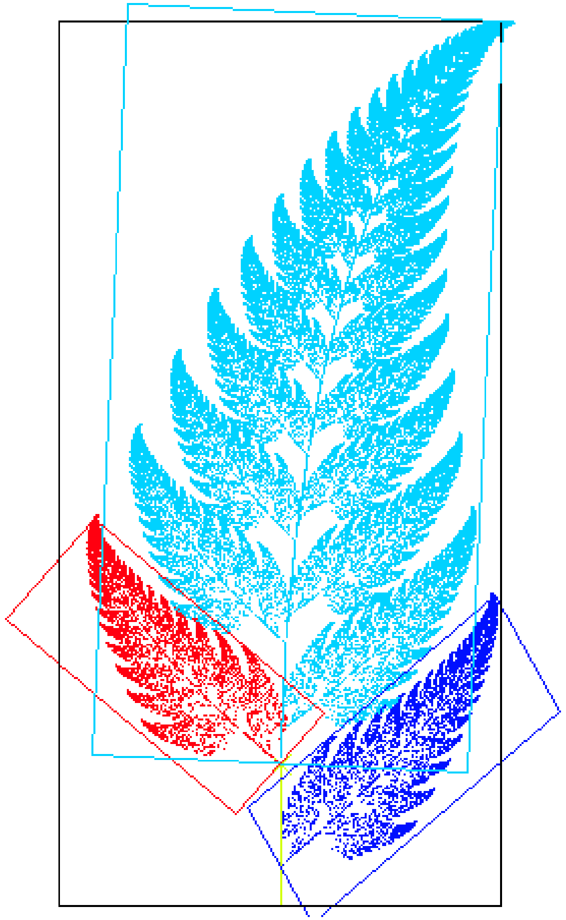


Kendine benzeyen fraktallar İslam mimarisinde de süslemelerde kendini göstermiştir. Harvard Üniversitesi'nin bu konuda yaptığı çalışma Topkapı Sarayı'nda yapılan incelemeler sonucunda desteklenmiştir



FRAKTALLARDA KENDINE BENZERLIK

(SELF SIMILARITY IN FRACTALS)



Afin kendine benzerlik özelliği gösteren eğreltiotu

- Kendine benzer bir nesne tamamen ya da yaklaşık olarak kendi parçasına benzerdir.
- Self-afinite ise parçaları x ve y koordinatlarında farklı ölçeklerde(oranlarda) bulunan parçalardan oluşur.
- Kendine benzerlik izotropi iken , self-afinite anizotropidir.

BU ŞEKİL BİR FRAKTAL MIDIR? KENDINE BENZER MIDIR?

FRAKTALLARDA BOYUT

(DIMENSION IN FRACTALS)

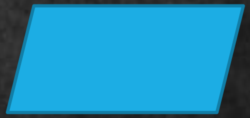
«Bulutlar küre değildir, dağlar koni değildir, kıyı şeridi çember değildir ve ağaç kabuğu düz değildir, ışık düz bir çizgide hareket etmez.»
(Mandelbrot, 1983).

Klasik geometride şekiller tamsayı boyutlara sahiptir.

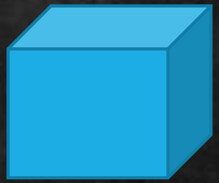
Bir noktanın uzunluğu, genişliği, yüksekliği ve dolayısıyla boyutu . yoktur.

Bir doğrunun uzunluğu vardır bu da boyutunu 1 yapar.

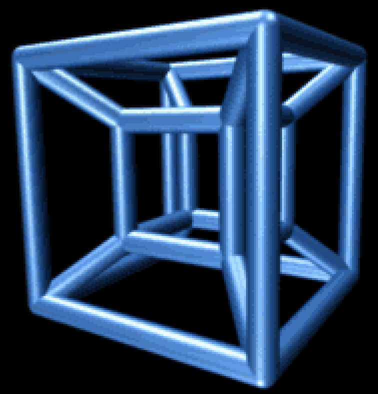
Bir düzlem 2 boyutludur , bunlar uzunluk ve genişliktir .



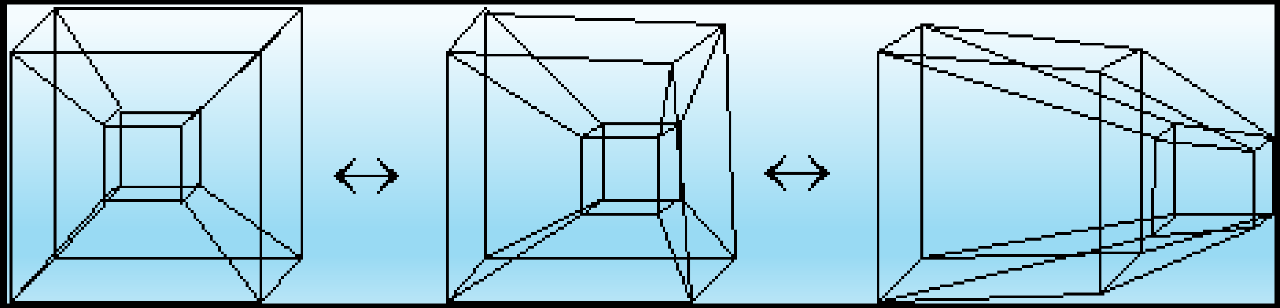
Uzayda bulunan bu kutunun boyu,eni,
yüksekliği vardır ve bu sayede 3 boyut kazanır.

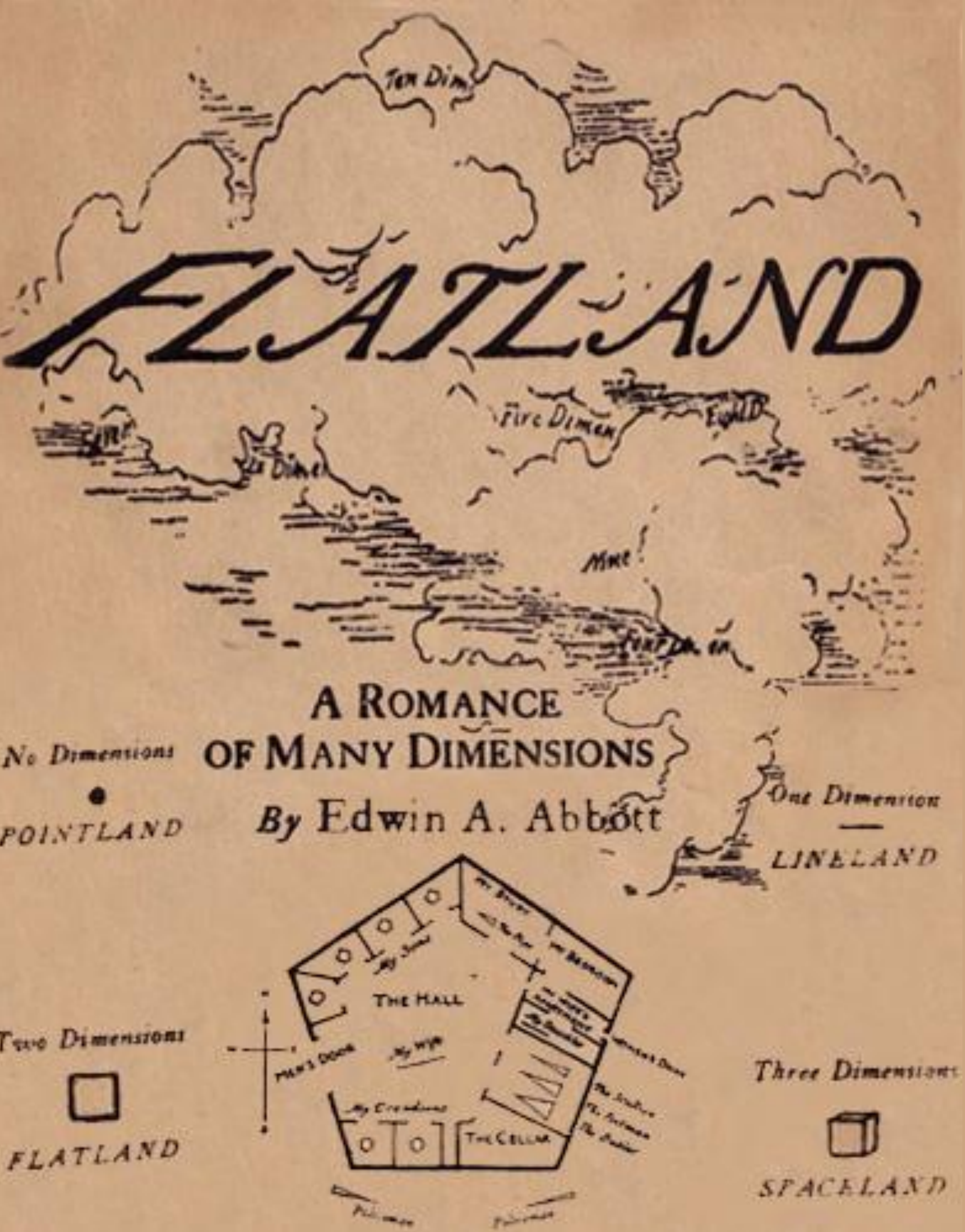


Herhangi şekilde statik olan nesnelere boyut eklemek için; zaman, renk ve perspektif gibi uzaysal olmayan boyutları kullanırız. Örneğin, gerçekte iki boyutlu olan bir bilgisayar ekranındaki resmi, kullanılan perspektif tekniği sayesinde üç boyutluymuş gibi görebilirsiniz.



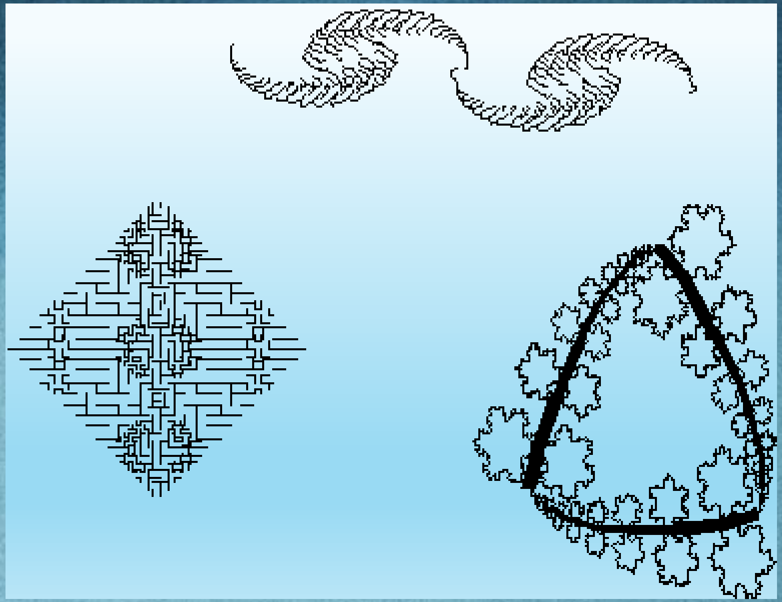
Uzaysal olmayan boyutların kullanılmasıyla, matematikçiler ve temel bilimciler geleneksel boyutların da ötesinde yeni boyutlar keşfettiler. Örnek olarak İngilizce'de «tesseracts» denilen 4 boyutlu küpleri ele alabiliriz. Bu küplerin 3 boyutlu hallerine baktığımızda, diğerleriyle ortak kenara sahip olan yedi küp gibi görürüz.





Bazen bu boyutları hayal etmemiz zor olabilir. Bu zorluğu «Düzülke»(Flatland) olarak dilimize çevrilen ve flimi yapılmış olan eser sayesinde zihnimizde daha iyi canlandırabiliriz.

Akıllı geometrik şekillerin, karelerin, üçgenlerin, beşgenlerin, çemberlerin yaşadığı bir düzlemde geçen bir macerayı anlatan Düzülke, bilimkurgunun öncüsü yapıtlardan biri. Boyut, düzlem, uzay, çok boyutluluk gibi kavramlar üzerine zihin açıcı ve düşündürücü bir öykü. Öykünün anlatıcısı Bir Kare önce bize ikiboyutlu ülkesini tanıtıyor; sonra birlikte Çizgiülke ve Noktaülke'yi ziyaret ediyor, Uzayülke'de bir üst boyutu anlamaya çalışmanın güçlüklerini tadıyor ve daha yüksek boyutlar üzerine kafa yoruyoruz



Felix Hausdorff (1868-1942) ve Abram Besicovitch(1891-1970) tamsayı olmayan boyutları öne sürerek matematikte devrim yarattılar. Bu önermelerini; doğruların bir boyutlu, karenin iki boyutlu, birçok eğrinin ise içerdikleri bilgi miktarına göre değişen «ara» boyutlara (in-between dimensions)(eğri ile karenin boyutları arasında değişen, tamsayı olmayan boyutlara) sahip olmalarıyla a gösterdiler. Bu tarz «ara» boyutlara Hausdorff-Besicovitch boyutları diyoruz.

MANDELBROT VE FRAKTAL BOYUT

Mandelbrot'un boyutla ilgili ilk çalışması İngiltere kıyılarının uzunluğunu merak etmesiyle başladı.

Mendelbrot'un tanımına gör fraktal boyut;

$$D = \lim_{a\to 0} \frac{\log N}{\log(\frac{1}{a})}$$

D : Dolambaçlık derecesi

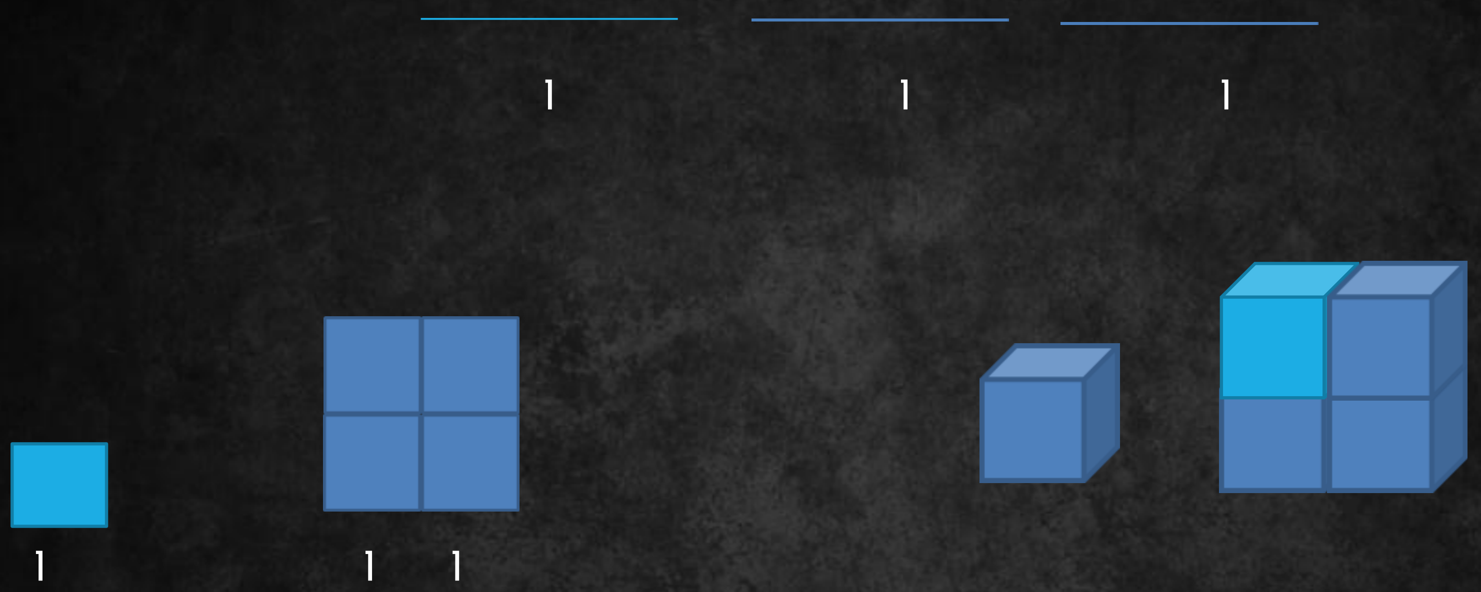
.

Bazı durumlarda kesrin değeri her adımda aynı olur kesir sabit bir değer olan D limitine yaklaşır. Bu durumda ;

$$D = \frac{\log N}{\log(\frac{1}{a})}$$

formülü kullanılır.

FRAKTALLAR kesirsel boyutlara sahip olabilirler



ŞEKİL	BOYUT	KOPYA SAYISI
Doğru Parçası	1	$2=2^1$
Kare	2	$4=2^2$
Küp	3	$8=2^3$

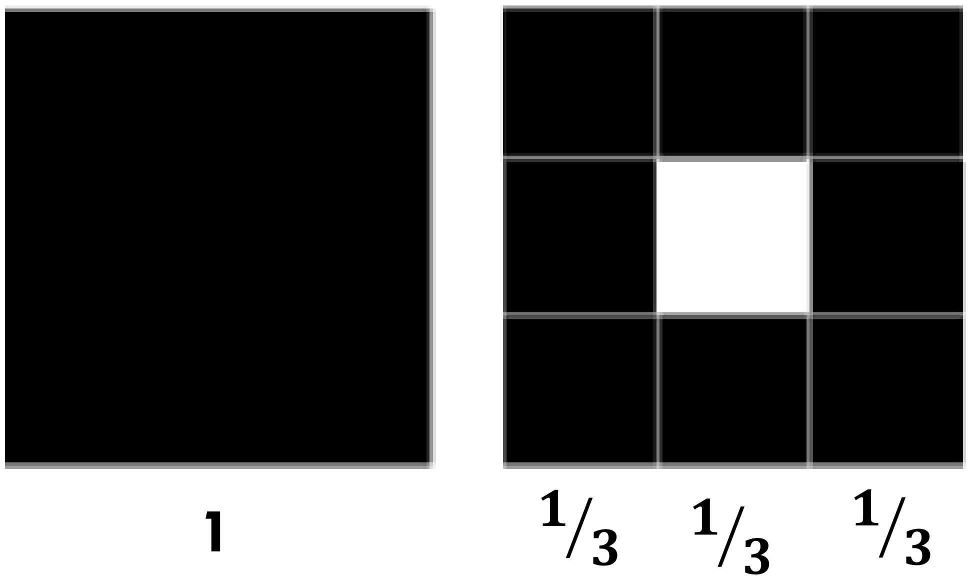
Sierpinski Üçgeninin Boyut Hesabı

(Sierpinski Triangle Dimension Calculation)

$^1/_2$ $^1/_2$

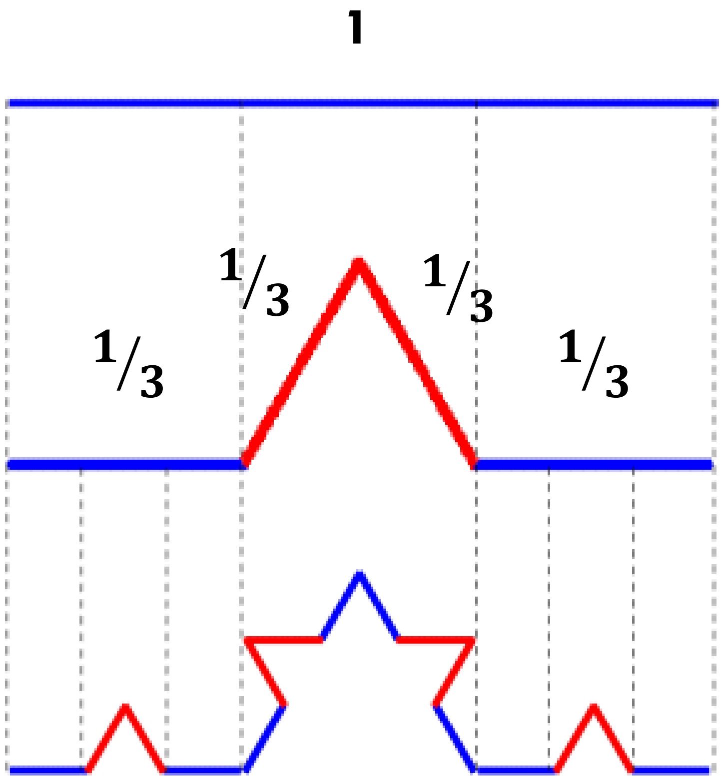
Sierpinski Halısının Boyut Hesabı

(Sierpinski Carpet Dimension Calculation)



ŞEKİL	BOYUT	KOPYA SAYISI
Doğru Parçası	1	$2=2^{1}$
Sierpinski Üçgeni	$d=\frac{\log 3}{\log 2}=1{,}5850$	$3=2^{?}$
Sierpinski Halısı	$d=\frac{\log 8}{\log 3}=1{,}8928$	$8=3^{?}$

KOCH EĞRİSİ VE BOYUTUNUN HESABI
(Koch Curve and Dimension Calculation)

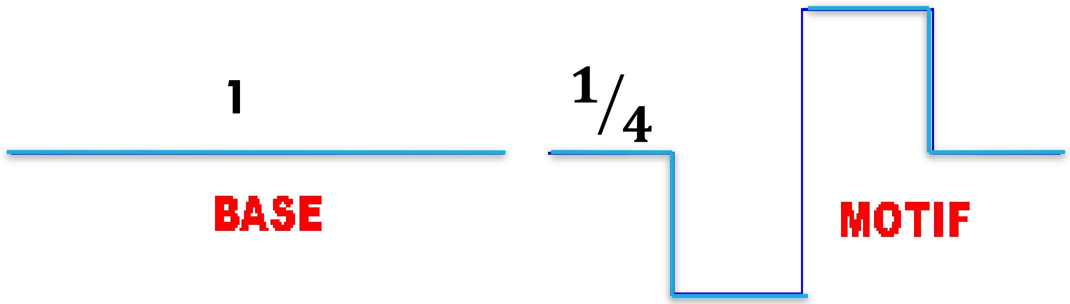


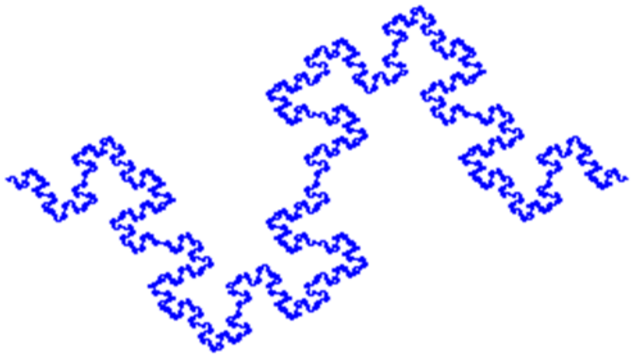
Kopya Sayısı $\longrightarrow$ $4 = 3^d$

Boyut $\longrightarrow$ $d = \dfrac{\log 4}{\log 3} = 1.26$

Minkowski Fraktalı Ve Boyutunun Hesabı

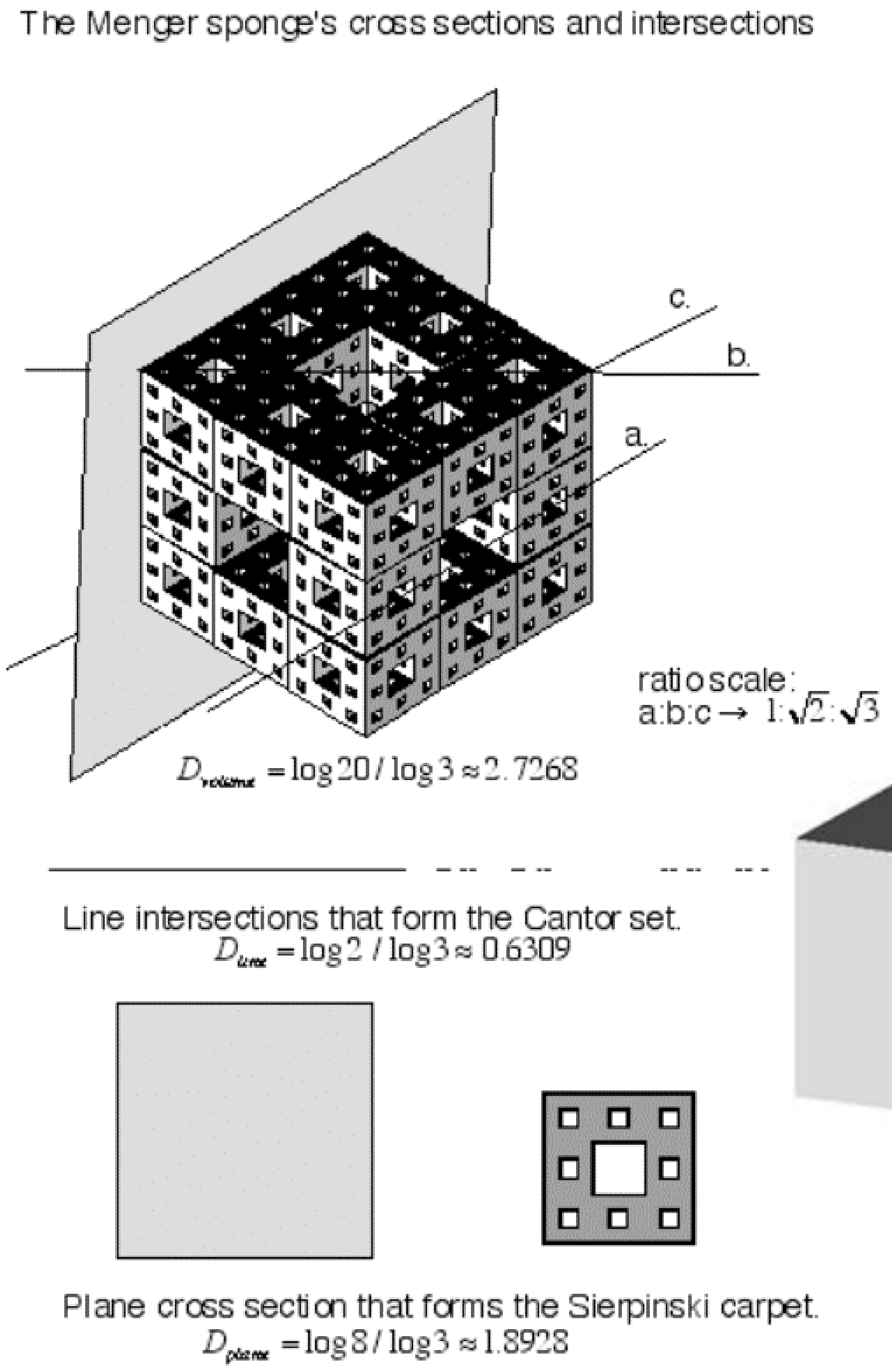
(Minkowski Fractal and Dimension Calculation)



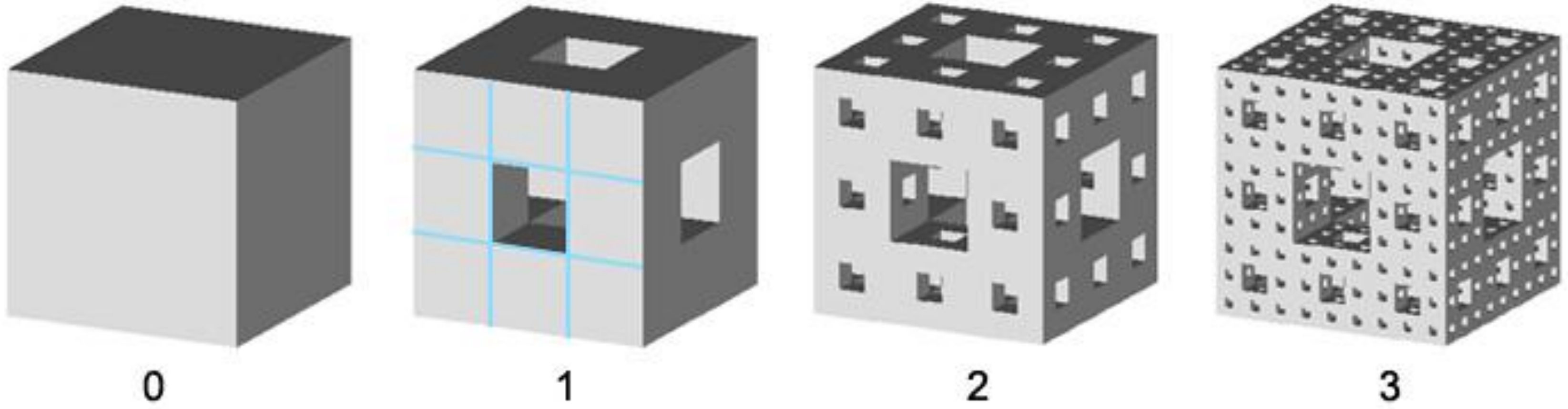


Kopya Sayısı $\longrightarrow$ $8 = 4^{d}$

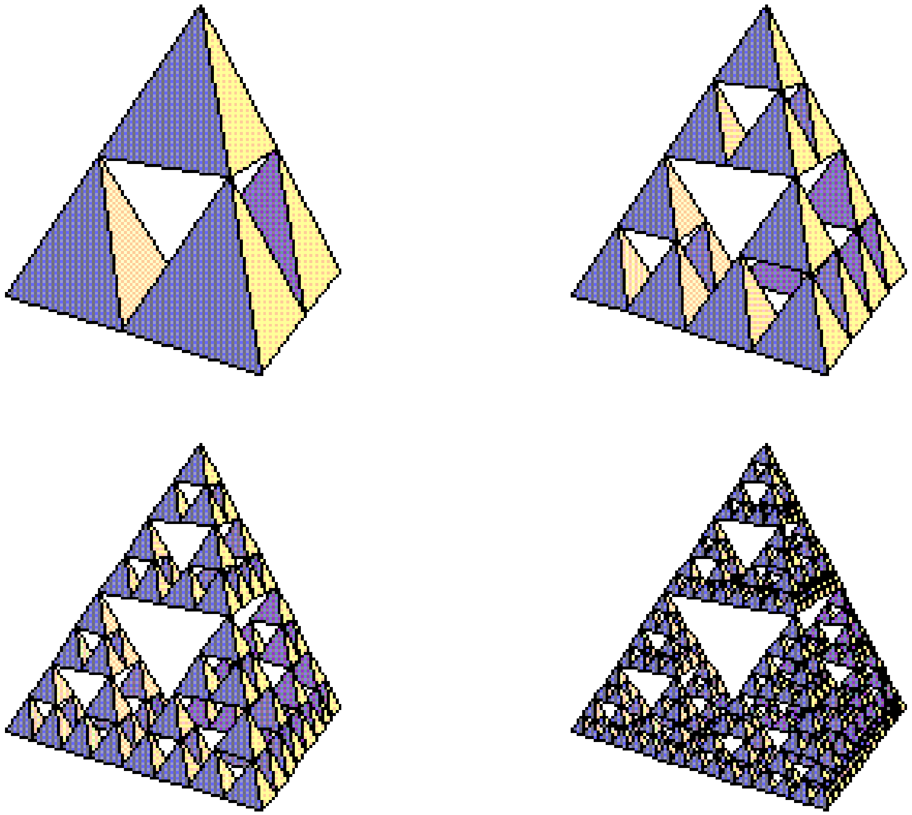
Boyut $\longrightarrow$ $d = \dfrac{\log 8}{\log 4} = 1.5$

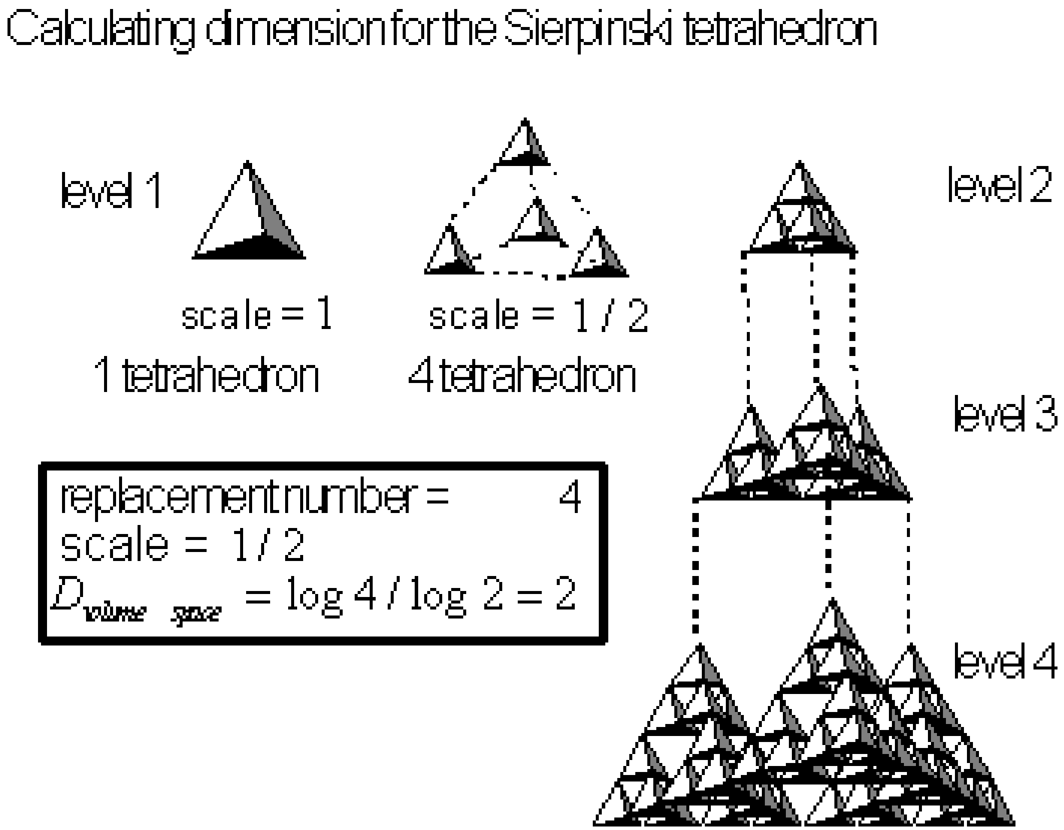


Menger Süngeri
Ve Boyut Hesabı
(Menger Sponge and Dimension Calculation)

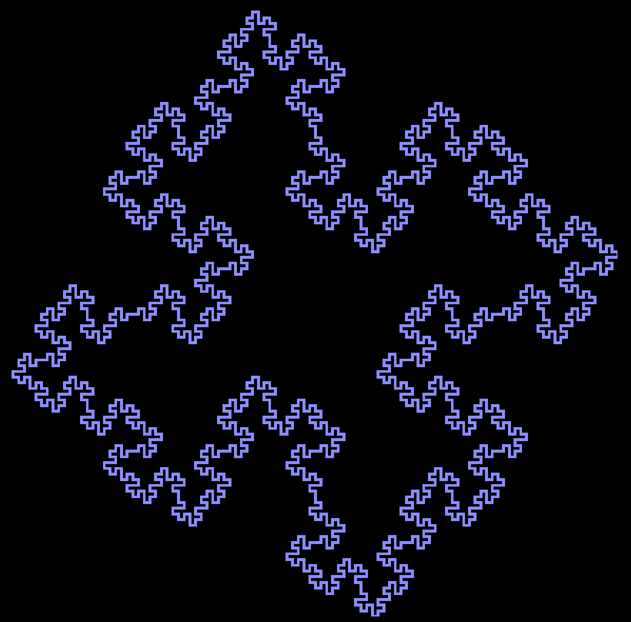


Sierpinski Üçgeni (3D)





KUTU SAYMA METODU(BOX COUNTING METHOD)



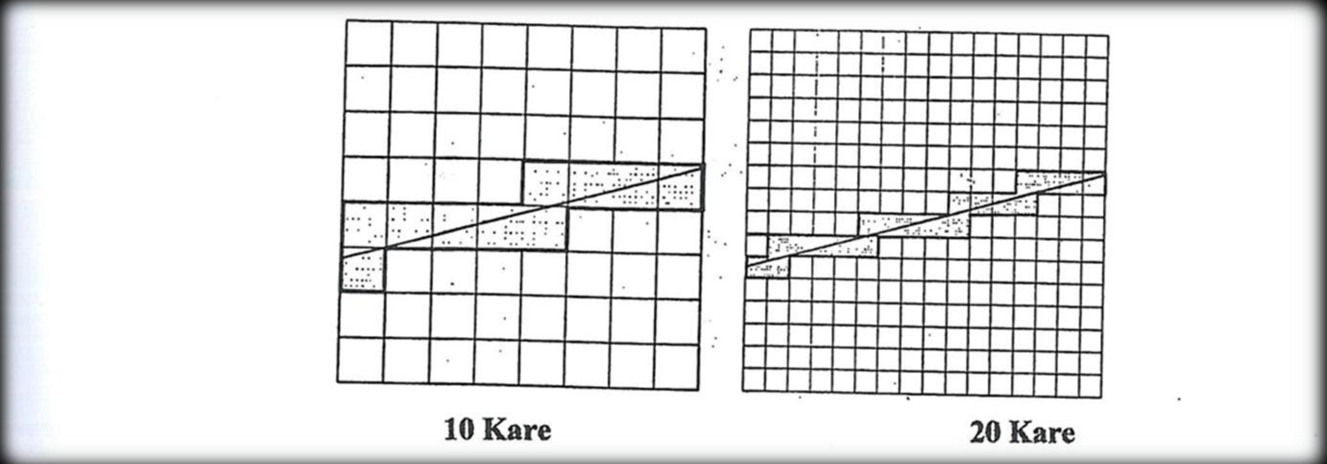
Bir eğrinin fraktal boyutunu ölçmenin bir yolu da kutu-sayma metodudur.

- Eğri küçük karelerle örtülür , sonra eğrinin geçtiği kareler sayılır.
- Bu metod kareler giderek küçültülerek tekrarlanır.
- Ardışık olarak eğriyi örtmede kullanılan karelerin sayısı p ve q ise;

$$\frac{\log(\frac{p}{q})}{\log 2}$$

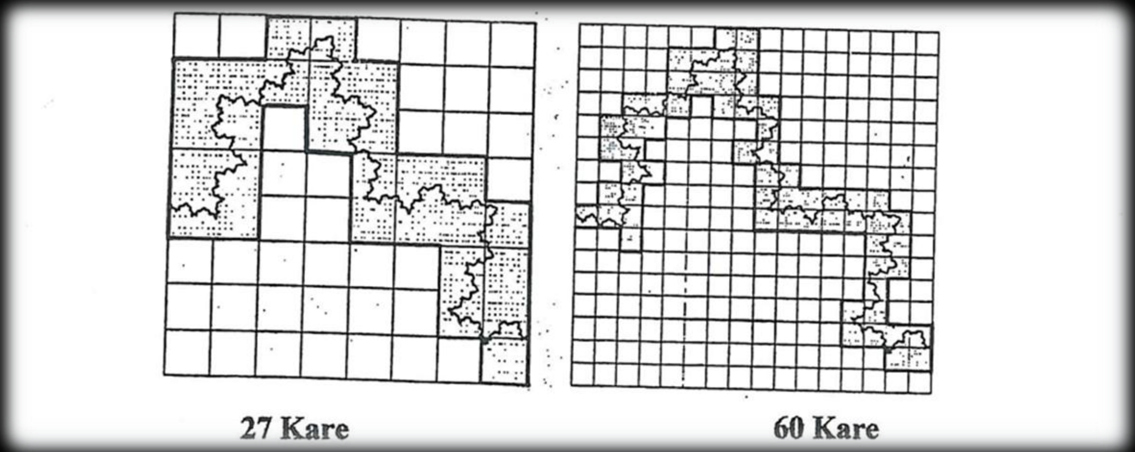
değeri fraktal eğrinin boyutudur.

Doğrunun fraktal boyutu 1 dir.

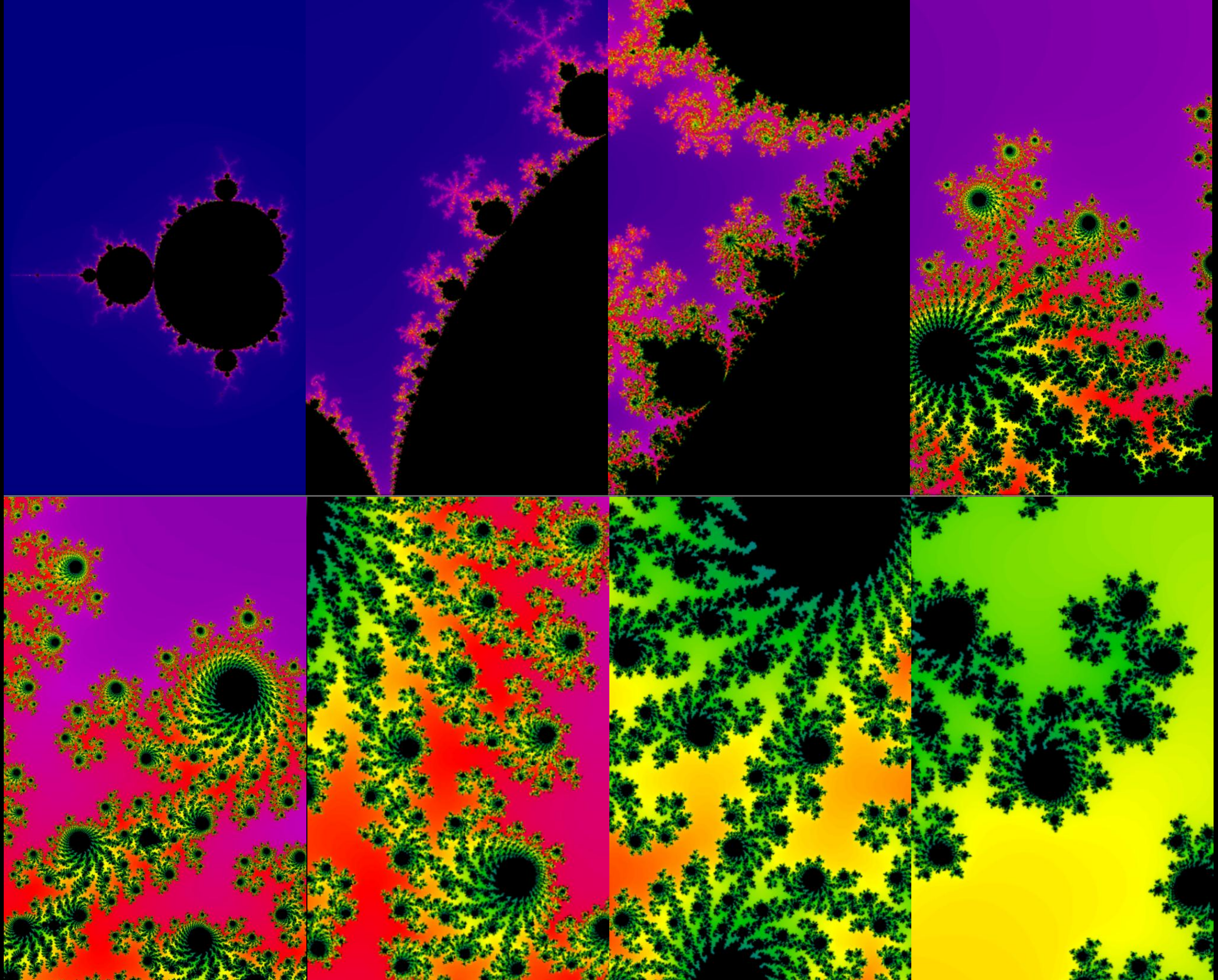


$$\text{fraktal boyut} = \frac{\log(20/10)}{\log 2} = 1$$

Julia cümlesinin boyutu 1.152 dir.



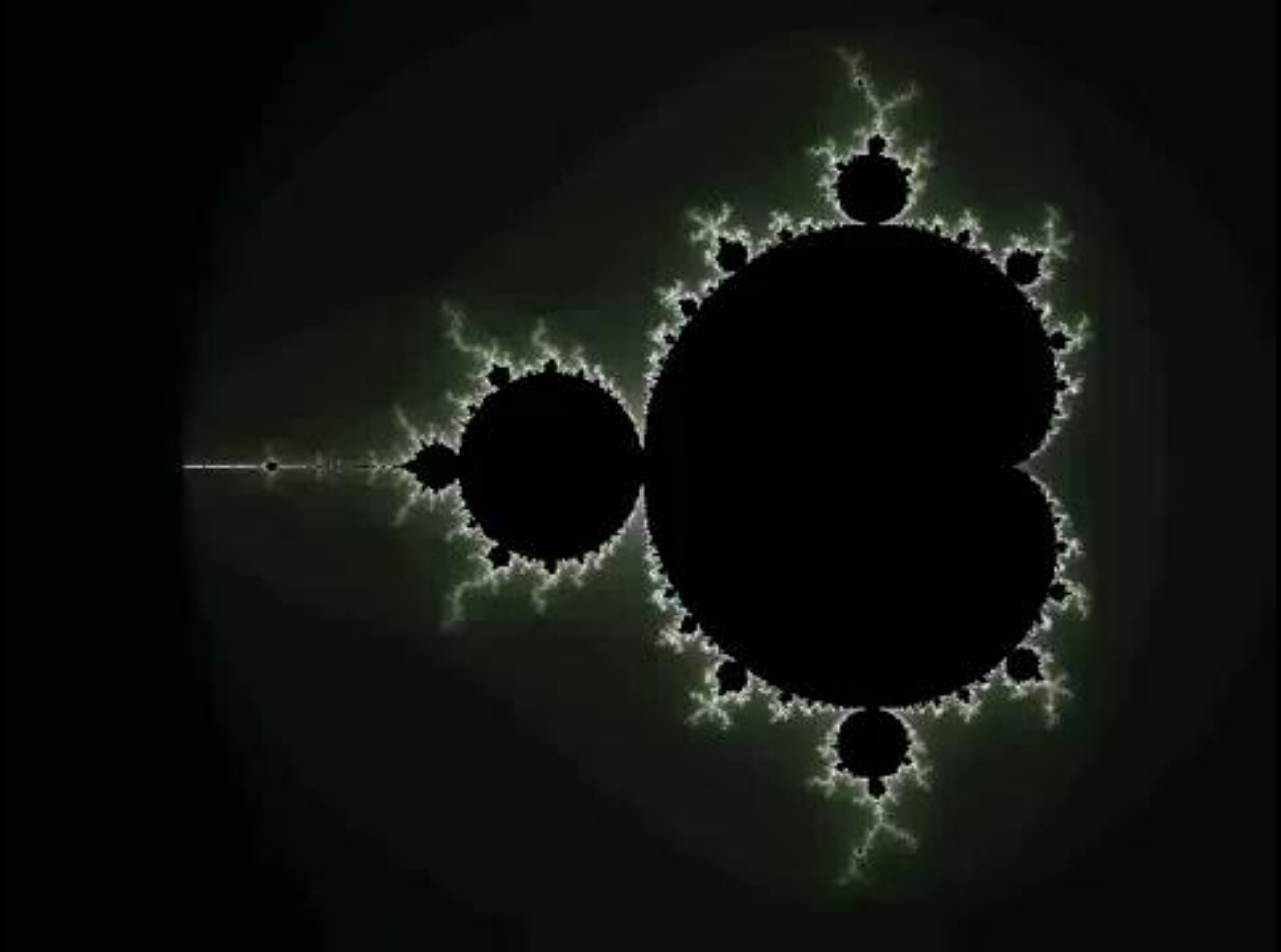
$$\text{Fraktal boyut} = \frac{\log\left(^{60}/_{27}\right)}{\log 2} = 1.152$$

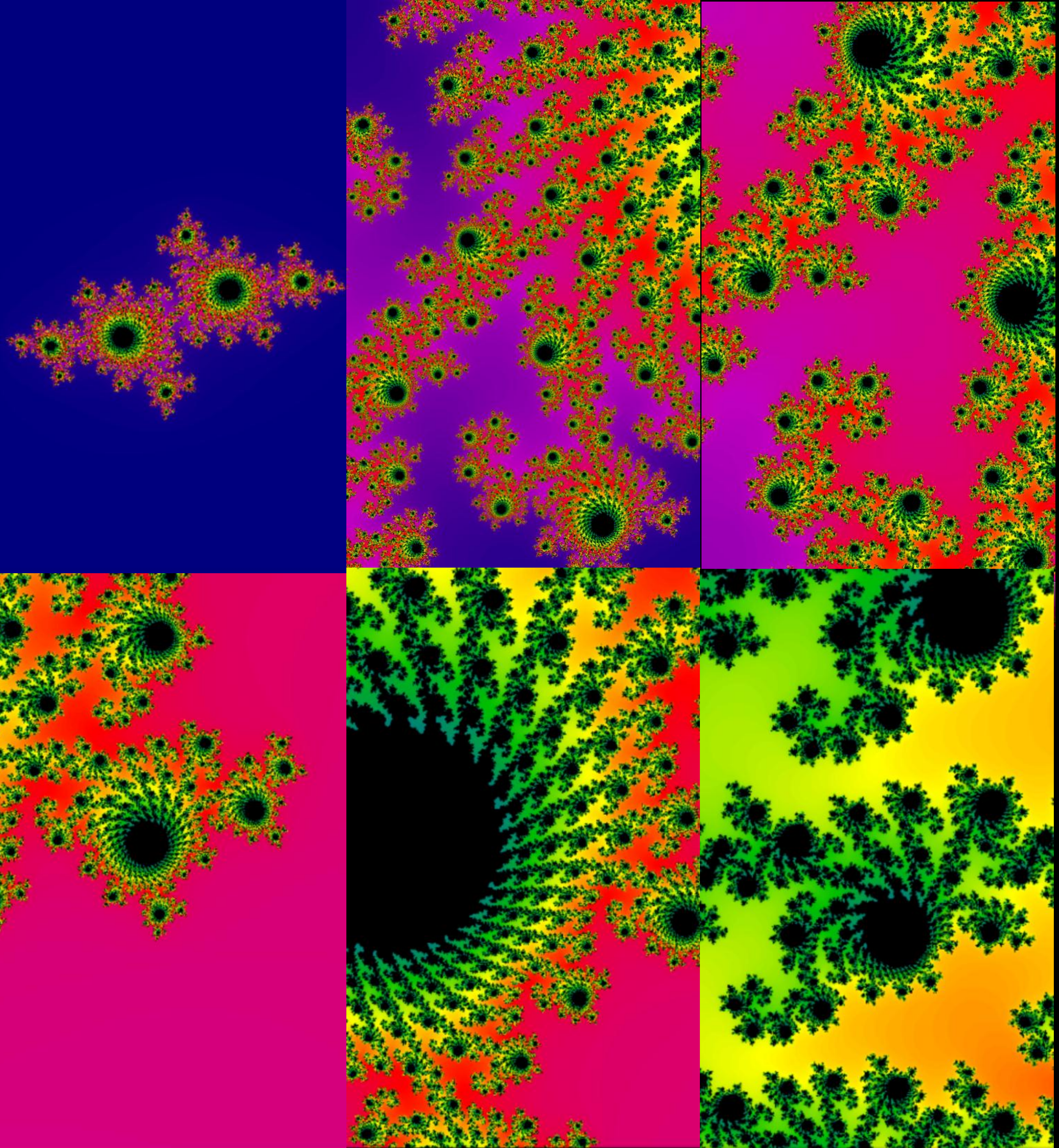


MANDELBROT KÜMESİ
(MANDELBROT SET)

Benoit Mandelbrot'un ikinci derece kompleks değişkenli polinomların dinamiklerini açıklamak için geliştirdiği ve incelediği kümedir. Mandelbrot kümesi, karmaşık düzlemin bir fraktal altkümesidir.

Mandelbrot kümesinin topolojik sınırının Hausdorff boyutu 2 dir





JULIA KÜMESİ (JULIA SET)

Bir fonksiyonun Julia kümesi, o fonksiyonun dinamiğini incelemek için kullanılan kümedir. Karmaşık fonksiyonlar, karmaşık düzlemi kendi dinamiklerine göre iki ayrık kümeye bölerler. Bu kümeler, Julia ve Fatou kümeleridir. Julia kümesi üzerinde kaotik davranış sergiler.

Mandelbrot kümesi, ikinci derece karmaşık katsayılı polinomların parametre uzayıdır. Yani, bu polinomların Julia kümelerini tarif eden bir nevi kombinatorik atlasdır.

Julia kümesinin topolojik sınırının Hausdorff boyutu 1.0812
dir