

FRAKTAL BOYUTLAR



BİR FRAKTAL EĞRİNİN
UZUNLUĞU

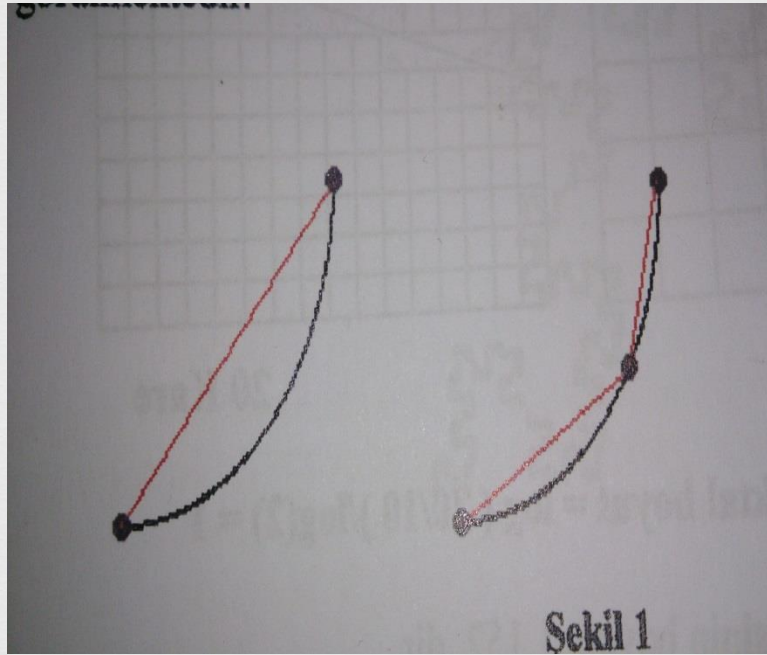


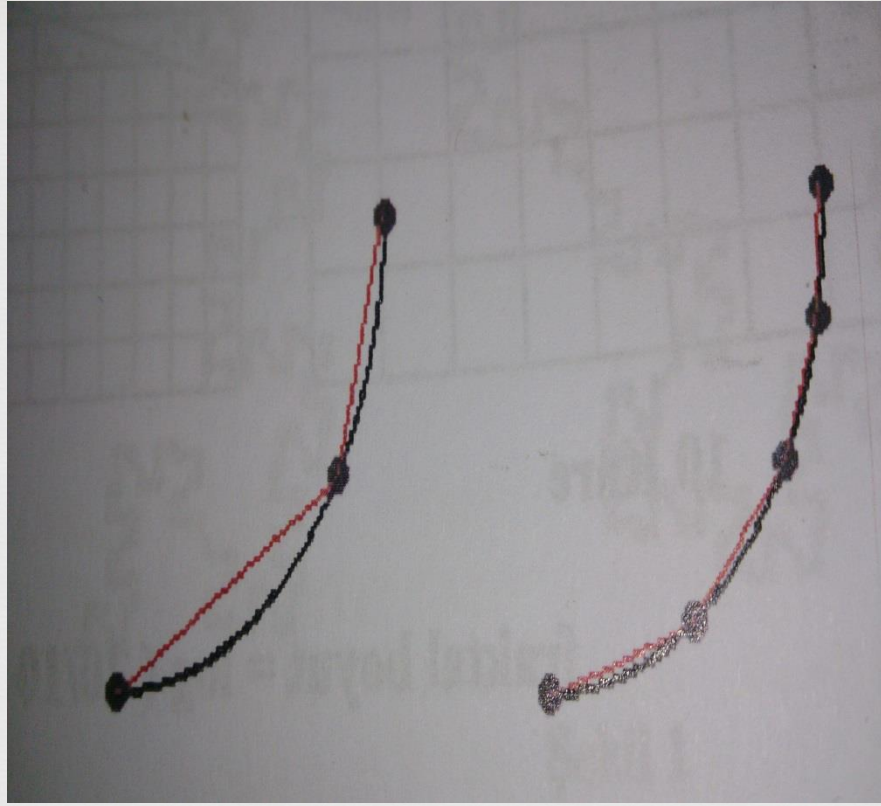
BİR EĞRİNİN UZUNLUĞUNU
ÖLÇMEDE KULLANILAN METOD;
GİTTİKÇE KÜÇÜLEN DOĞRU
PARÇALARI YARDIMIYLA YAKLAŞIK
UZUNLUĞUNUN BULUNMASI
METODUDUR.

-EĞRİ ÜZERİNDE İKİ NOKTA SEÇİLİP
,BU NOKTALARI BİRLEŞTİREN DOĞRU
PARÇALARI İLE İŞE BAŞLANIR .

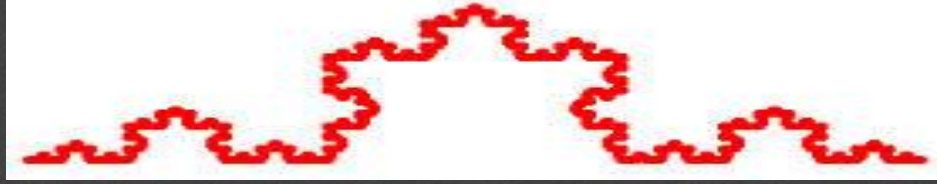
- BU NOKTALAR ARASINDAKİ EĞRİ
UZUNLUĞU,NOKTALARI BİRLEŞTİREN
DOĞRU PARÇASININ UZUNLUĞUNDAN
KÜÇÜK OLAMAZ.

SEÇİLEN ORJİNAL NOKTALAR ARASINDA ,EĞRİ
ÜZERİNDE OLAN DİĞER NOKTALARI DA
SEÇİP,ONLARI DAHA KÜÇÜK OLAN DOĞRU
PARÇALARIYLA BİRLEŞTİRELİM.





BU İŞLEME DEVAM EDİLDİĞİNDE ; DOĞRU
PARÇALARI BİRLEŞİMİNİN UZUNLUĞU ,EĞRİ
UZUNLUĞUNA YAKLAŞACAKTIR...

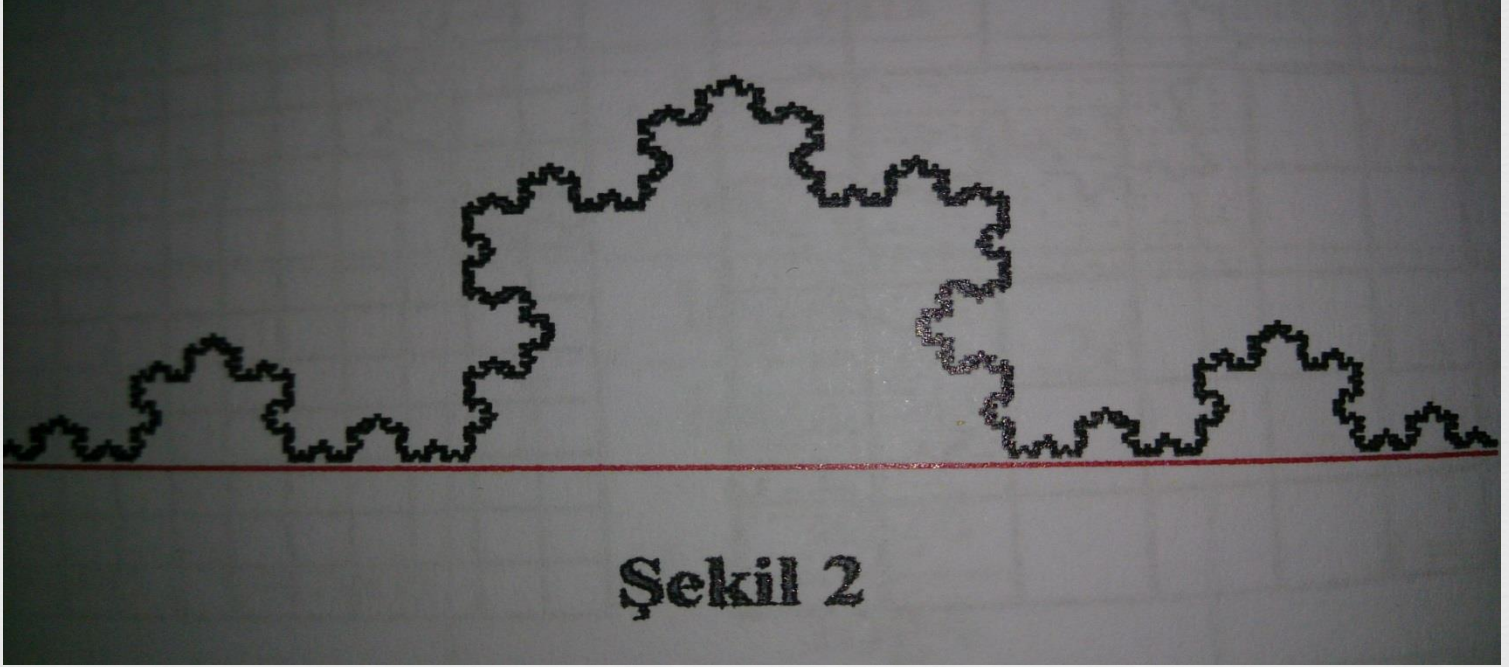


KOCH EĞRİSİNİN UZUNLUĞU



→ EĞRİ ÜZERİNDE DOĞRU BİRLEŐTİRME İŞLEMİNİ KOCH EĞRİSİNDE UYGULAYALIM. ←

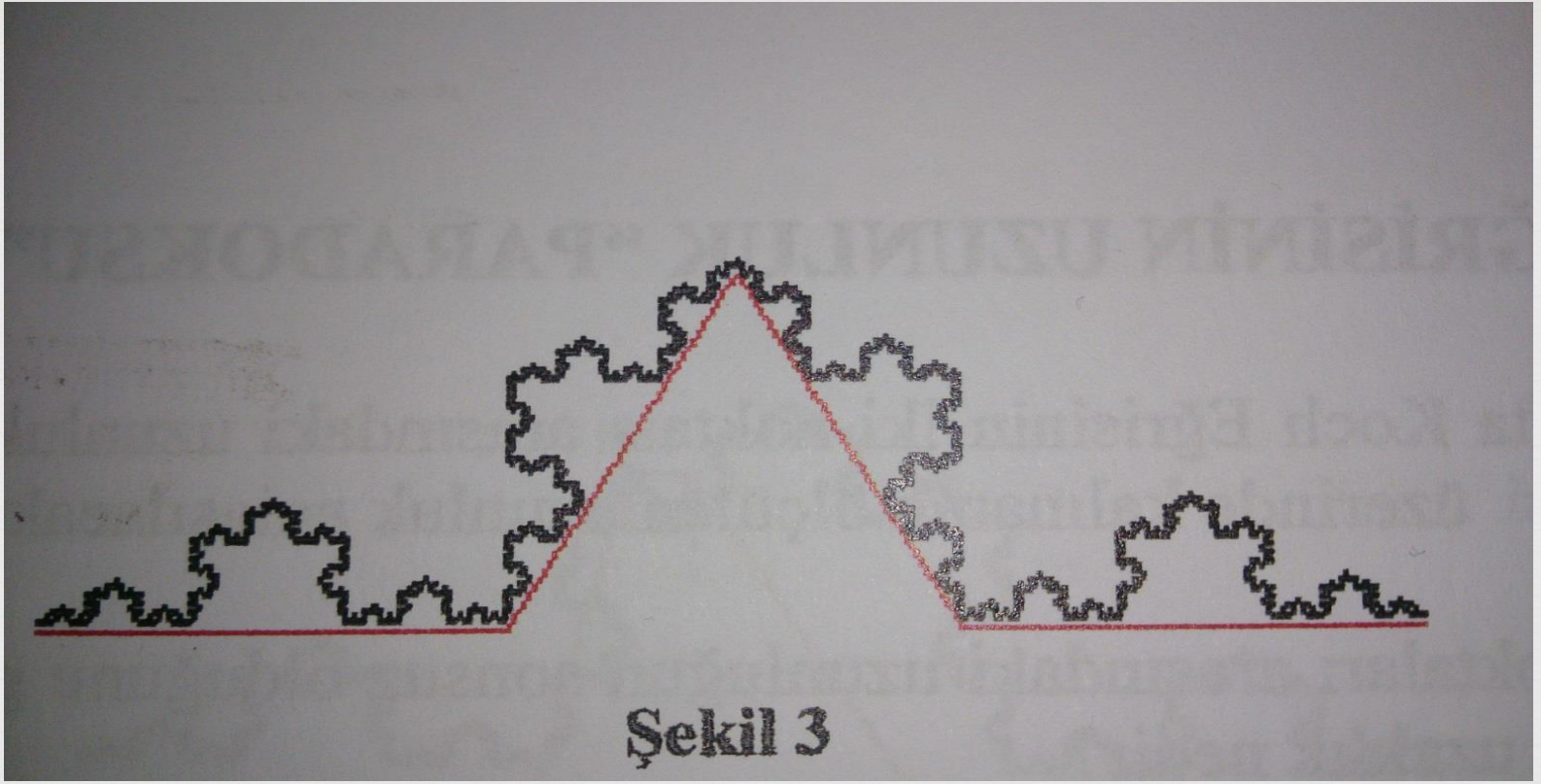
-ÖNCE KOCH EĞRİSİNİN UÇ NOKTALARINI BİRLEŞTİREN DOĐRUYU ÇİZELİM.



-BU DOĞRUNUN UZUNLUGUNU L_0 İLE GÖSTERELİM. $L_0=1$ OLSUN.



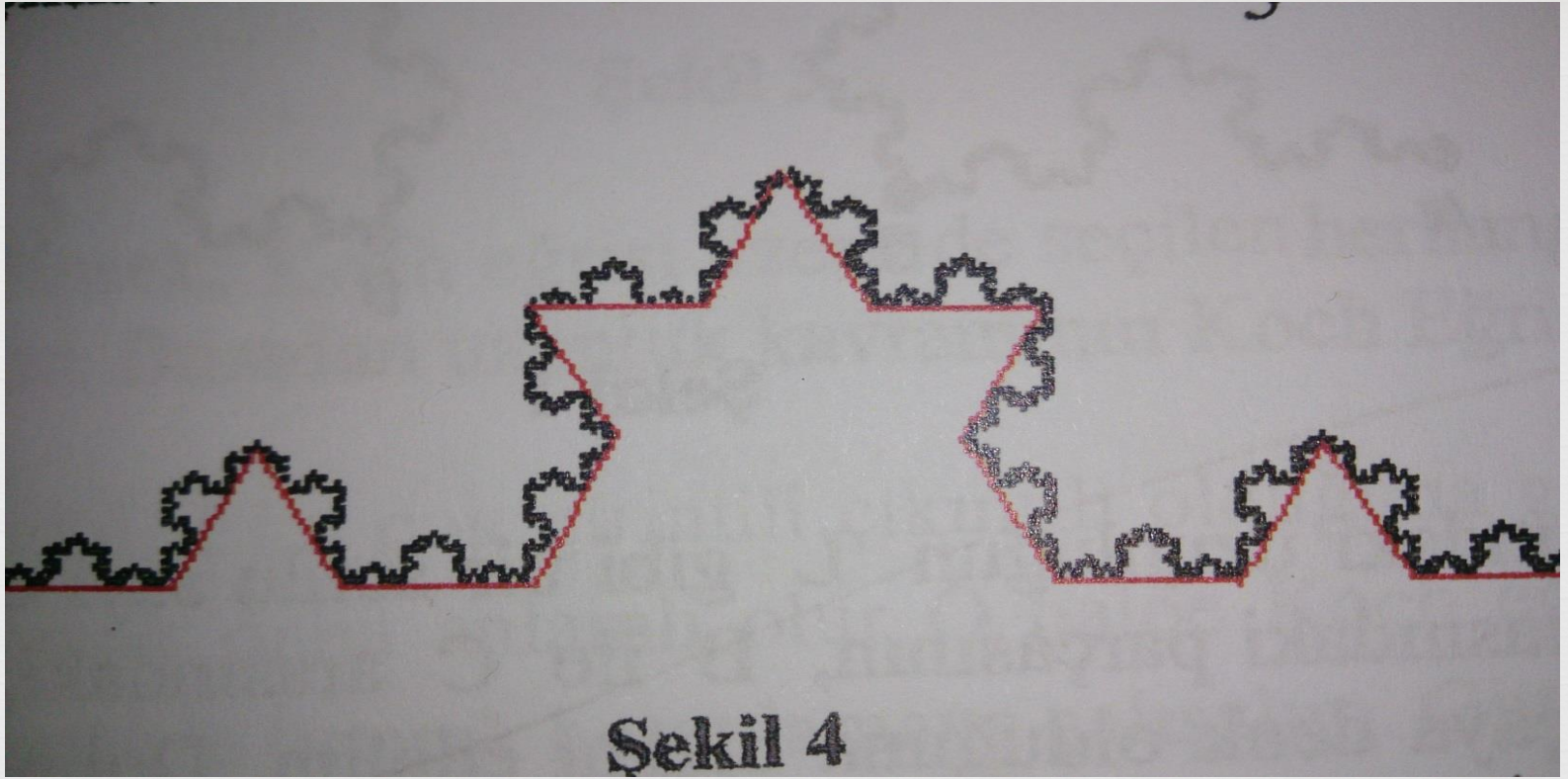
- ❧ KOCH EĞRİSİNİN UZUNLUĞUNUN 1' DEN BÜYÜK OLDUĞUNU BİLİYORUZ.
- ❧ SEÇTİĞİMİZ UÇ NOKTALARI ARASINDA KALAN ÜÇ NOKTA DAHA BELİRLEYELİM. HER BİRİ $1/3$ UZUNLUGUNDA OLAN DÖRT DOĞRU PARÇASI ELDE EDİLİR.



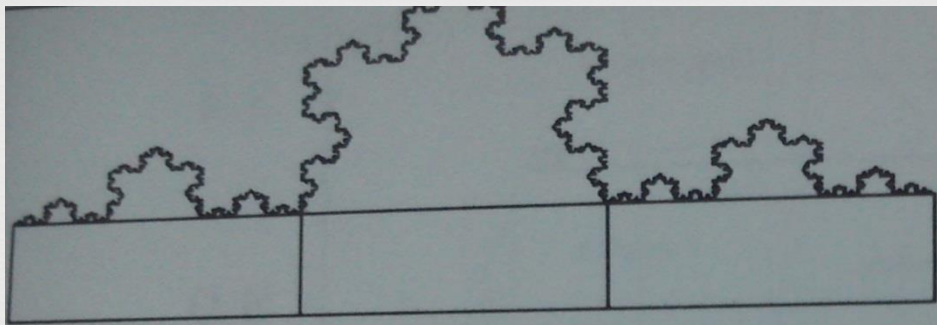
-DOĞRU PARÇALARININ BİRLEŞİMİNİN
UZUNLUĞU $L_1=4/3$ DİR.



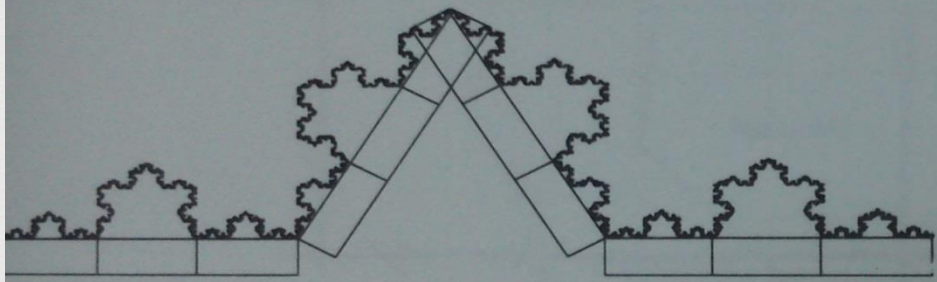
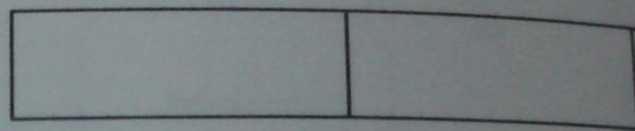
- BU İŞLEME DEVAM EDELİM. HER BİR NOKTA ÇİFTİ ARASINDA KALAN ÜÇER NOKTA DAHA BELİRLEYELİM.
- HER BİRİNİN UZUNLUĞU $1/9$ OLAN 16 TANE KÜÇÜK DOĞRU PARÇASI VERECEKTİR.



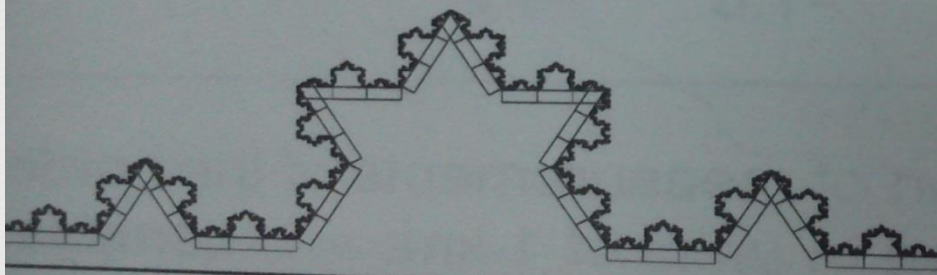
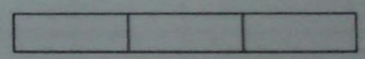
-TÜM BU DOĞRU PARÇALARININ BİRLEŞİMİNİN UZUNLUĞU $L_2 = 16/9 = (4/3)^2$ OLUR.



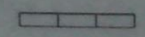
scale 1



scale 1/3



scale 1/9

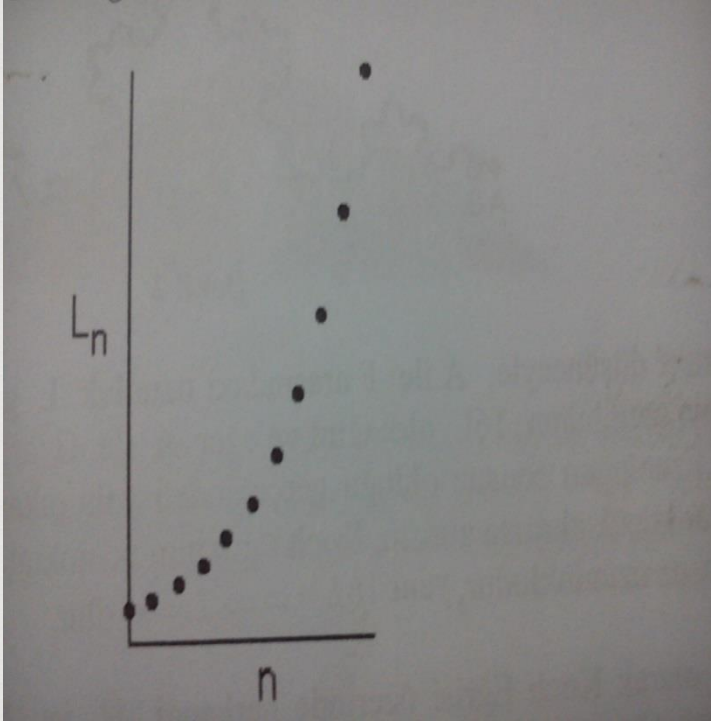




- BU İŞLEME n DEFA DEVAM EDİLDİĞİNDE DOĞRU PARÇALARININ BİRLEŞİMİNİN TOPLAM UZUNLUĞU $L_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$ DİR.
- KOCH EĞRİSİNİN UZUNLUĞU HER BİR L_n ' DEN BÜYÜKTÜR.
- ŞİMDİ BU İFADEYİ (L_n - n) GRAFİĞİNDE GÖSTERELİM.



BURADAN
KOCH
EĞRİSİNİN
SONSUZ
UZUNLUKTA
OLDUĞUNU
GÖRMEKTEYİZ.



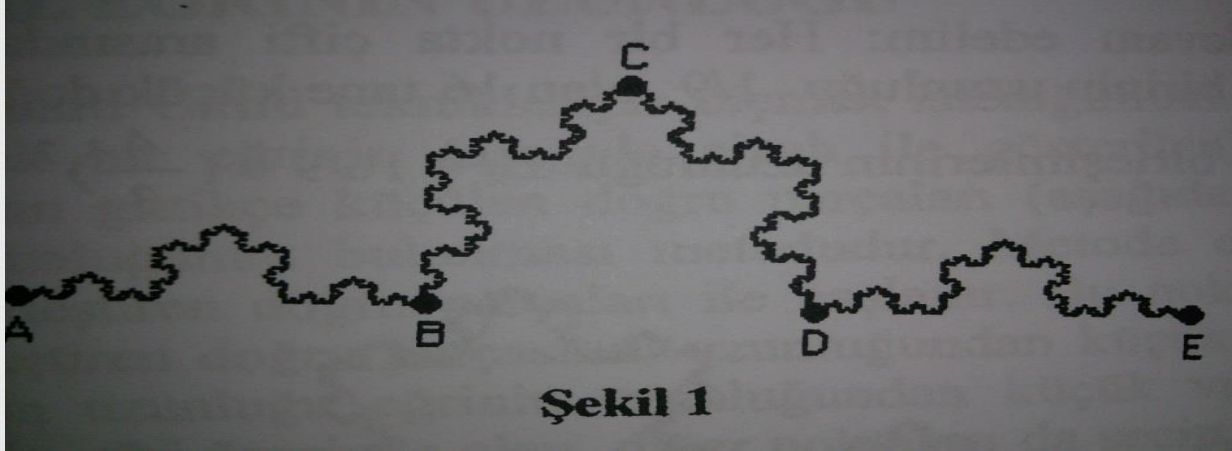
L_n - n grafiği

ÇIKARIMLAR



SONSUZ UZUNLUĞA SAHİP OLAN SADECE
KOCH EĞRİSİ DEĞİLDİR,
! BU EĞRİNİN HERHANGİ İKİ NOKTASI
ARASINDA Kİ UZUNLUK DA SONSUZDUR.

KOCH EĞRİSİNİN UZUNLUK 'PARADOKSU'



-A İLE E NOKTALARI ARASINDA Kİ UZUNLUĞUN
SONSUZ OLDUĞUNU BULDUK .

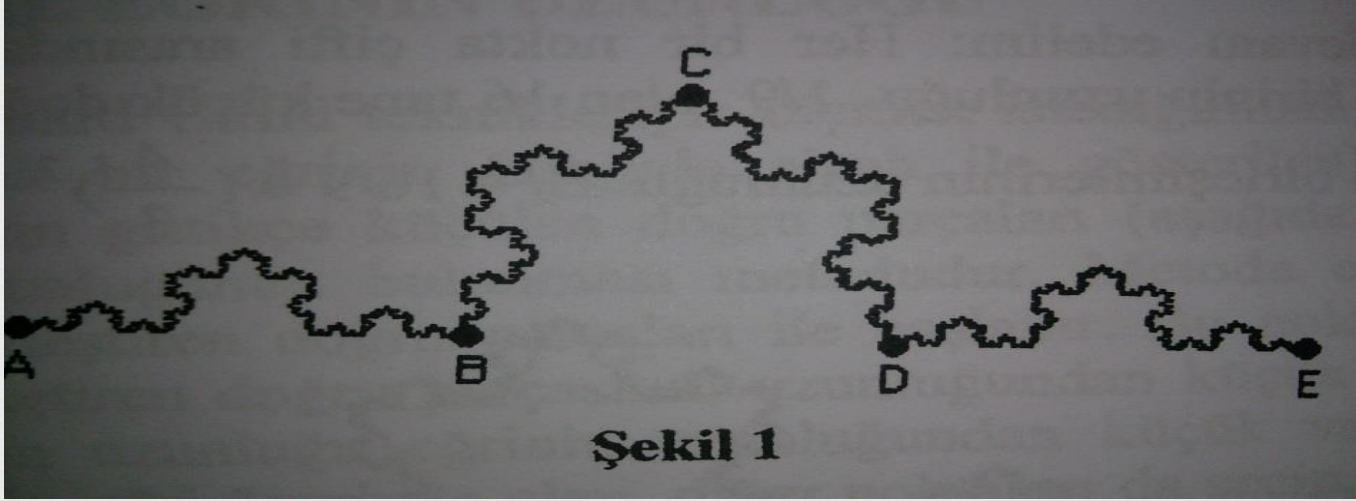
-ŞİMDİ İSE A İLE B ARASINDAKİ UZUNLUĞUN DA
SONSUZA GİTTİĞİNİ GÖSTERELİM.

-ŞEKİLDE A,B,C,D,E NOKTALARI VERİLMİŞTİR. BURADAN A İLE B ARASINDA Kİ UZUNLUĞUN L GİBİ BİR SONLU SAYI OLDUĞUNU DÜŞÜNÜRSEK ;B-C , C-D 'NİNDE L UZUNLUKLU OLDUĞUNU GÖREBİLİRİZ.DOLAYISIYLA A İLE E ARASI UZAKLIK 4L OLUR BU İSE KOCH EĞRİSİNİN UZUNLUĞUNUN SONSUZ OLMASI İLE ÇELİŞİR

$$4L = \infty , L = \infty$$

-A İLE B ARASI UZAKLIK DA SONSUZDUR

→ KOCH EĞRİSİ ÜZERİNDE SEÇİLEN HERHANGİ NOKTA ÇİFTLERİ ARASINDA Kİ UZAKLIK SONSUZDUR.



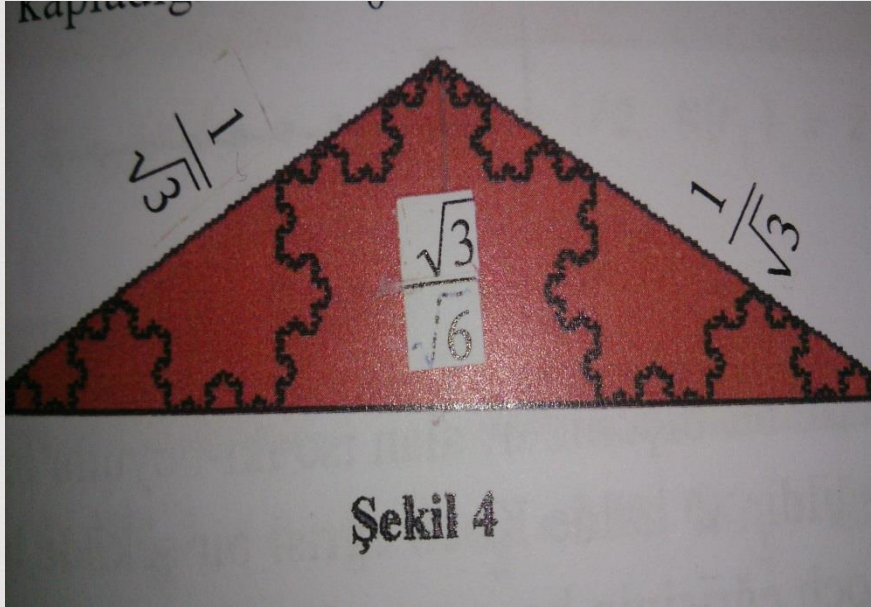
→ BURADAN UZUNLUK KAVRAMININ KOCH EĞRİSİ İÇİN KULLANIŞSIZ BİR ÖLÇÜM OLDUĞUNU GÖREBİLİRİZ.

→ EĞRİ ÇOK GİRİNTİLİ ÇIKINTILI OLDUĞUNA GÖRE BELKİ DE UZUNLUĞUN YERİNE KAPLADIĞI ALANA BAKMAK DAHA ANLAMLI OLUR.

→ KOCH EĞRİSİNİN KAPLADIĞI ALANI ; KOCH EĞRİSİNİ İKİZKENAR ÜÇGENLERLE ÖRTEREK HASAPLAMAYA ÇALIŞALIM.

-KOCH EĞRİSİNİ TEK BİR ÜÇGENLE ÖRTELİM;

1.AŞAMA



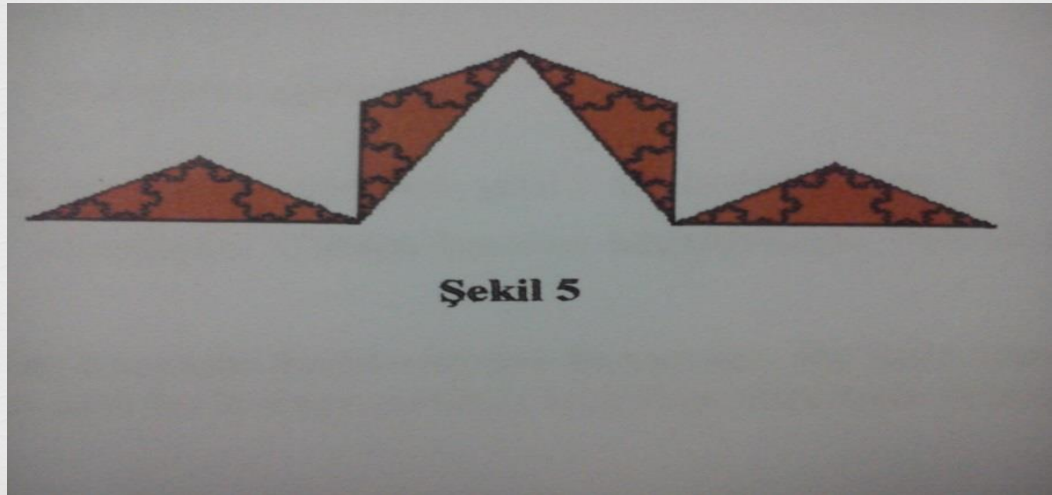
→ ÜÇGENİN TABAN UZUNLUĞU 1 İKEN, EŞİT KENARLARININ HERBİRİNİN UZUNLUKLARI TABANIN $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ER KATI OLSUN.

ÜÇGENİN YÜKSEKLİĞİ $\frac{\sqrt{3}}{6}$ DIR.

ALANIMIZ İSE $A_0 = \frac{\sqrt{3}}{12}$

-KOCH EĞRİSİNİN ALANI A_0 'DAN DAHA KÜÇÜKTÜR.

- ÜÇGENİN YERİNE KOCH EĞRİSİNİ ÖRTEN DÖRT KÜÇÜK ÜÇGEN ALALIM. ↓



HER BİR ÜÇGENİN TABAN UZUNLUĞU VE YÜKSEKLİĞİ ,ORJİNAL ÜÇGENİNKİNDEN $1/3$ ORANINDA KÜÇÜK OLACAKTIR.

BÖYLECE HER BİRİNİN ALANI DA ESAS ÜÇGENİN $1/9$ 'U ORANINDA KÜÇÜLECEKTİR. BURADAN;

➔ BU DÖRT ÜÇGENİN TOPLAM ALANI $A1=(\sqrt{3}/12)(4/9)$ OLUR

-ÖRTME İŞLEMİNİ HER BİR KÜÇÜK ÜÇGEN YERİNE DAHA KÜÇÜK DÖRT ÜÇGENLE YAPALIM.

YENİ ÜÇGENLERİN TABAN VE YÜKSEKLİKLERİ ÖNCEKİ ÜÇGENLERİN $1/3$ Ü KADARDIR.

BURADAN ÜÇGENLERİN ALANLARI ÖNCEKİLERİN $1/9$ ' U KADAR OLUR.



TÜM ÜÇGENLERİN ALANI ;

$$A_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{12}\right) \left(\frac{16}{81}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{12}\right) \left(\frac{4}{9}\right) \left(\frac{4}{9}\right) \text{ OLUR .}$$

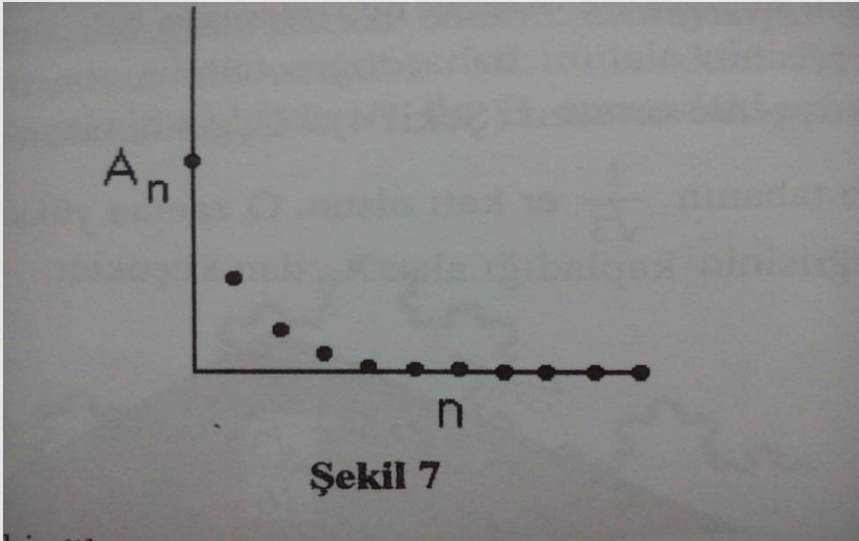
➔ BU İŞLEM n DEFA DEVAM ETTİĞİNDE

$$\text{TOPLAM ALAN } A_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{12}\right) \left(\frac{4}{9}\right)^n \text{ DİR}$$

- KOCH EĞRİSİNİN ALANI HER BİR A_n ' DEN DAHA KÜÇÜKTÜR. BUNU GRAFİKLE İFADE EDELİM;

→ KOCH EĞRİSİNİN
KAPLADIĞI ALANIN 0
OLDUĞUNU
GÖRÜRÜZ.

-UZUNLUK 1
BOYUTLU, ALAN İSE
2 BOYUTLU
ÖLÇÜMDÜR.İKİSİ DE
KOCH EĞRİSİNE
UYGUN ÖLÇÜM
DEĞİLDİR .



-O HALDE KOCH
EĞRİSİ 1-BOYUTTAN
BÜYÜK, 2-BOYUTTAN
KÜÇÜKTÜR.

An -n grafiği