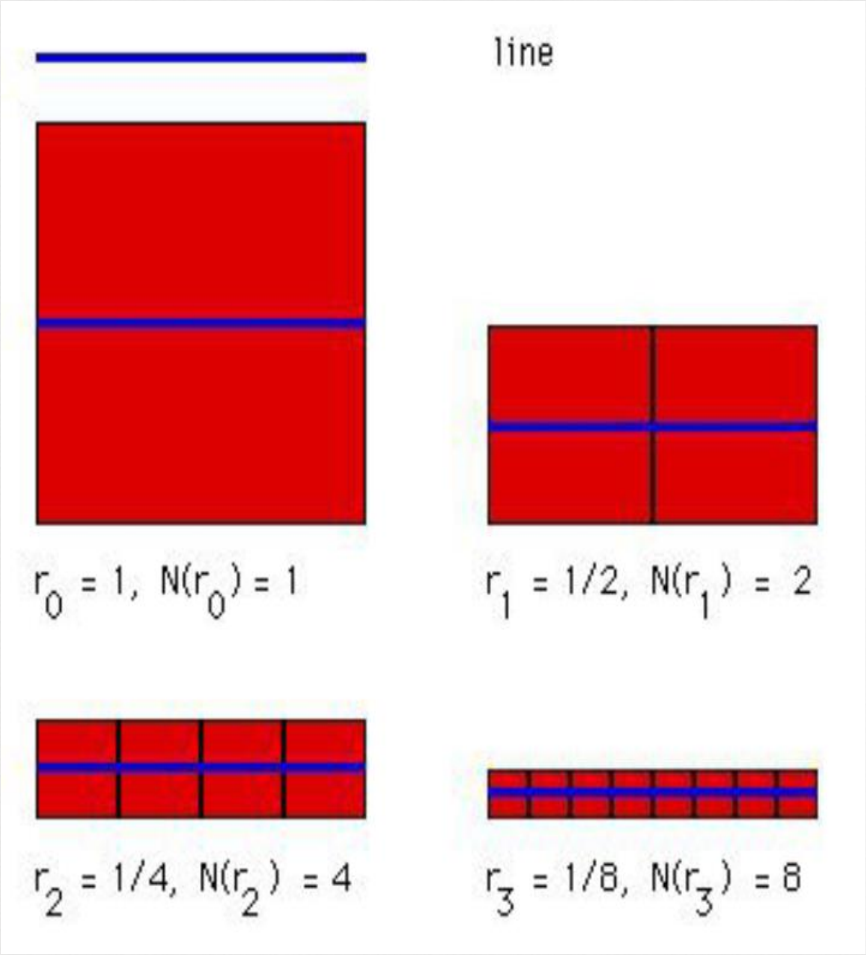
KUTU SAYMA METODU İLE BOYUT

-BU METOD DA AMAÇ ,OBJEYİ SABİT KENAR UZUNLĞU r OLAN KARALERLE ÖRTMEK VE N(r)-(KARE SAYISININ) r YE NASIL BAĞLI OLDUĞUNA BAKMAKTIR.

DOĞRUNUN KUTU-SAYMA BOYUTU

DOĞRUYA GİTTİKÇE KÜÇÜLEN KUTULARLA ÖRTTÜĞÜMÜZDE ŞU ŞEKLİ ELDE EDERİZ;



N(1)=1

N(1/2)=2=1/(1/2)

N(1/4)=4=1/(1/4)

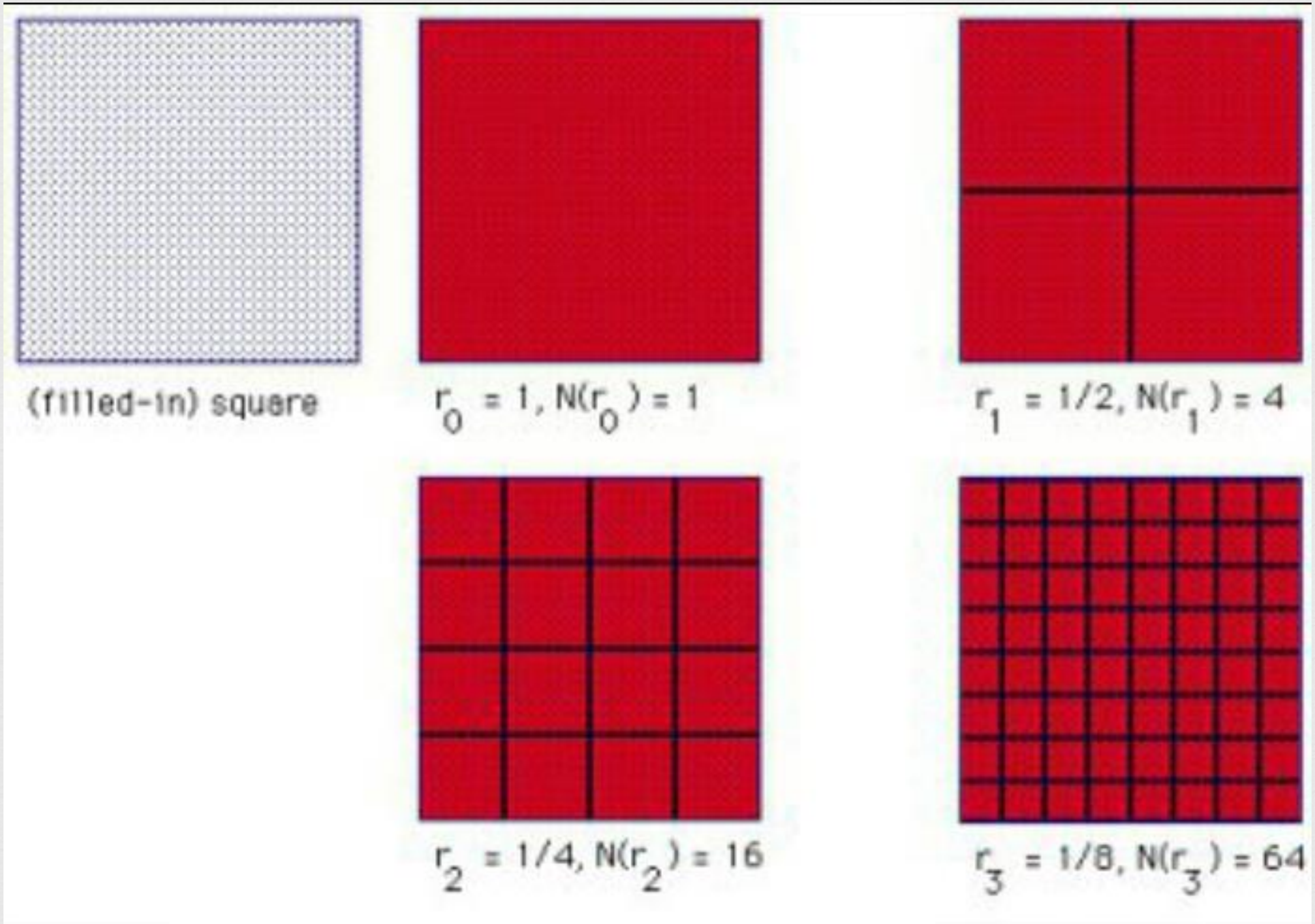
N(1/8)=8=1/(1/8)

VE GENELLERSEK N(r)=1/r OLDUĞUNU GÖREBİLİRİZ.

- EĞER OBJE DOĞRU PARÇASI GİBİ 1 BOYUTLU İSE N(r)=1/r OLMASINI BEKLERİZ.

İÇİ DOLU KARENİN KUTU SAYMA BOYUTU

İÇİ DOLU KAREYİ a2 İLE GÖSTERELİM. ÖNCEKİ ŞEKİLDE YAPTIĞIMIZ GİBİ BU KAREYİ GİTTİKÇE KÜÇÜLEN KARELERLE ÖRTERSEK;


(filled-in) square
r0 = 1, N(r0) = 1
r1 = 1/2, N(r1) = 4
r2 = 1/4, N(r2) = 16
r3 = 1/8, N(r3) = 64

N(1)=1
N(1/2)=4=1/(1/4)=(1/(1/2))^2
N(1/4)=16=1/(1/16)=(1/(1/4))^2
N(1/8)=64=1/(1/64)=(1/(1/8))^2

VE GENELLERSEK $N(r)=(\frac{1}{r})^2$

-BÖYLECE OBJE İÇİ-DOLU BİR KARE GİBİ 2 BOYUTLU İSE $N(r)=(\frac{1}{r})^2$ OLMASI BEKLENİR.

DAHA KARMAŞIK ŞEKİLLER İÇİN N(r) VE 1/r ARASINDA Kİ İLİŞKİ AÇIK OLMAYABİLİR. EĞER N(r) NİN YAKLAŞIK olarak $(\frac{1}{R})$^d OLACAĞINI TAHMİN EDERSEK ; d 'Yİ NASIL BULABİLİRİZ ONA BAKALIM;

N(r)= $(\frac{1}{R})$^d NIN LOĞARİTMASI ALINILIRSA ,r NİN DAHA KÜÇÜK DEĞERLERİ İÇİN DAHA İYİ SONUÇ VERDİĞİ GÖRÜLMEKTEDİR.

log(N(r)) = log$(\frac{1}{R})$^d = d.log$(\frac{1}{R})$ BULUNUR.

BU İSE BİZE $\lim_{a \to 0} \frac{\log(N(ra))}{\log(\frac{1}{ra})}$ =d TANIMINI VERİR.

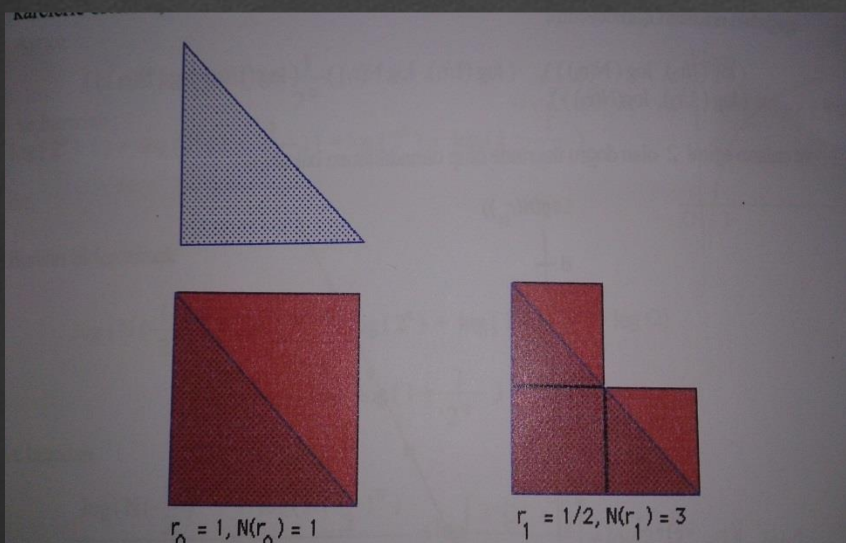
BU LİMİT VAR İSE d ;
İLGİLİ OBJENİN KUTU SAYMA BOYUTU d_k ADINI ALIR.BU LİMİTİN ALTERNATİF YAKLAŞMASI İSE $\log(N(r))=d.\log(\frac{1}{r})$ İFADESİNİN EĞİMİ d OLAN BİR DOĞRUNUN DENKLEMİ OLDUĞUDUR.

logN(r) KARŞISINDA log(1/r) İŞARETLENDİĞİNDE ,ELDE EDİLEN NOKTALAR EĞİMİ d_k OLAN BİR DOĞRU ÜZERİNDE OLMALIDIR.

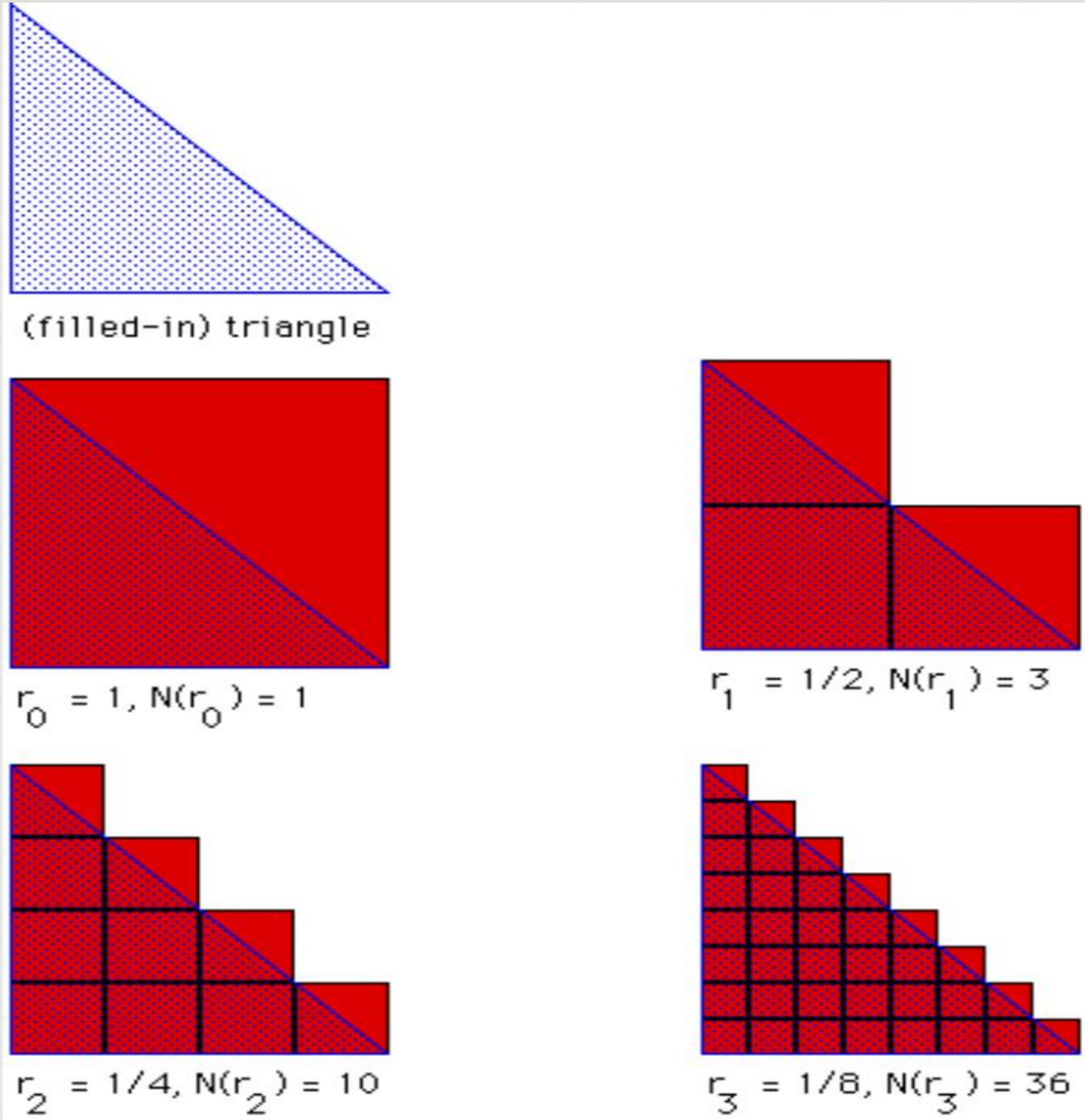
BU METOD BOYUTU BULMADA log-log YAKLAŞIMI ADINI ALIR.

ÖRNEK OLARAK İÇİ DOLMUŞ ÜÇGENİ ELE ALABİLİRİZ

İÇİ DOLU ÜÇGENİN KUTU SAYMA BOYUTU



İÇİ DOLU ÜÇGENİ GİTTİKÇE KÜÇÜLEN KARELERLE ÖRTELİM;


(filled-in) triangle
r0 = 1, N(r0) = 1
r1 = 1/2, N(r1) = 3
r2 = 1/4, N(r2) = 10
r3 = 1/8, N(r3) = 36

N(1)=1

N(1/2)=3=1+(2=2′)=N((1/2)′)

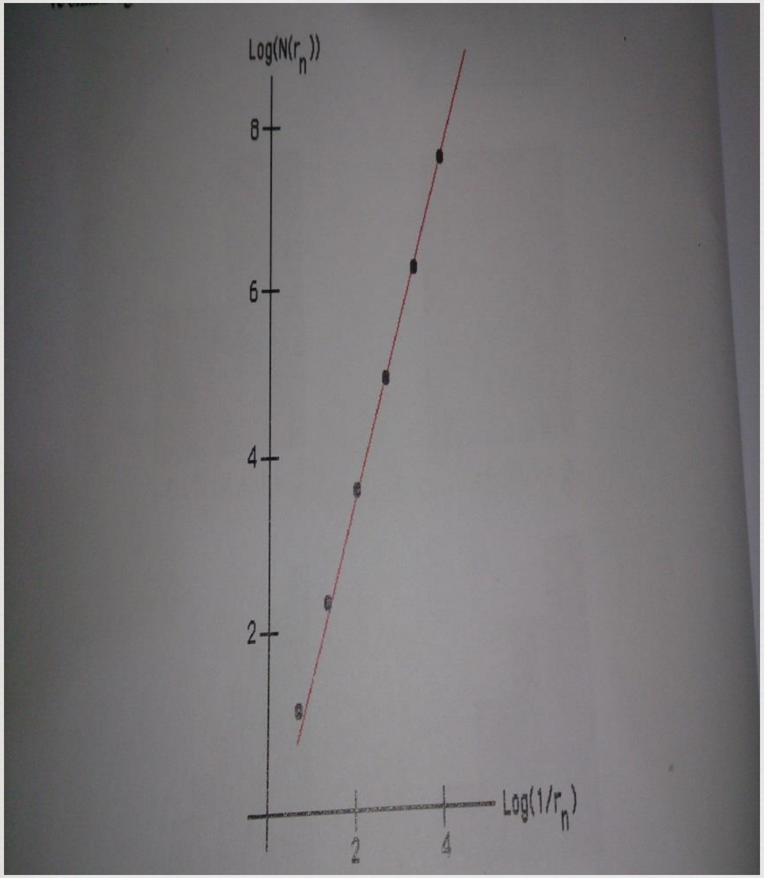
N(1/4)=1+2+3+(4=2^2)=N((1/2)^2)

N(1/8)=36=1+2+3+4+5+6+7+(8=2^3)
=N((1/2)^3) VE

N(1/2)^n)=1+2+3+……..+2^n

OLUŞAN ŞEKİL ,DOĞRU VEYA KAREDE OLDUĞU GİBİ AŞİKAR OLMAYABİLİR.İÇİ DOLU ÜÇGENİN 2-BOYUTLU OLDUĞUNU BEKLERİZ.O HALDE KUTU-SAYMA BOYUTU 2 OLMALIDIR.

(LOG(1/r0),LOG(N(r0))),
((LOG(1/r1)).(LOGN(r1)),
(LOG(1/r2),(LOG (N(r2)) …………………



NOKTALAR EĞİMİ 2 OLAN DOĞRU ÜZERİNDEDİR..

ŞEKİLDE İSE BAZILARI TAM ÜSTÜNDE DEĞİL GİBİDİR,BUNUN SEBEBİ KARELERİN BİRDEN FAZLA ÜÇGENİ ÖRTMESİNDENDİR

İÇİ DOLU ÜÇGENİN 2 BOYUTLU OLMASINI N İSPATI;

$N(1/2)^k=1+2+3+\ldots+k=\frac{k.(k+1)}{2}$ VE

$\log((\frac{k}{2})^n)=1+2+3+..+2^n=\frac{2^n.(2^{+1})}{2}$

$\log(N(1/2)^n)=\log(\frac{2^n.(2^{+1})}{2})$

$=\log(2^n)+\log(2^{+1})-\log(2)$

$(2^n+1)=(2^(1+\frac{1}{2^n}))$ BURADAN;

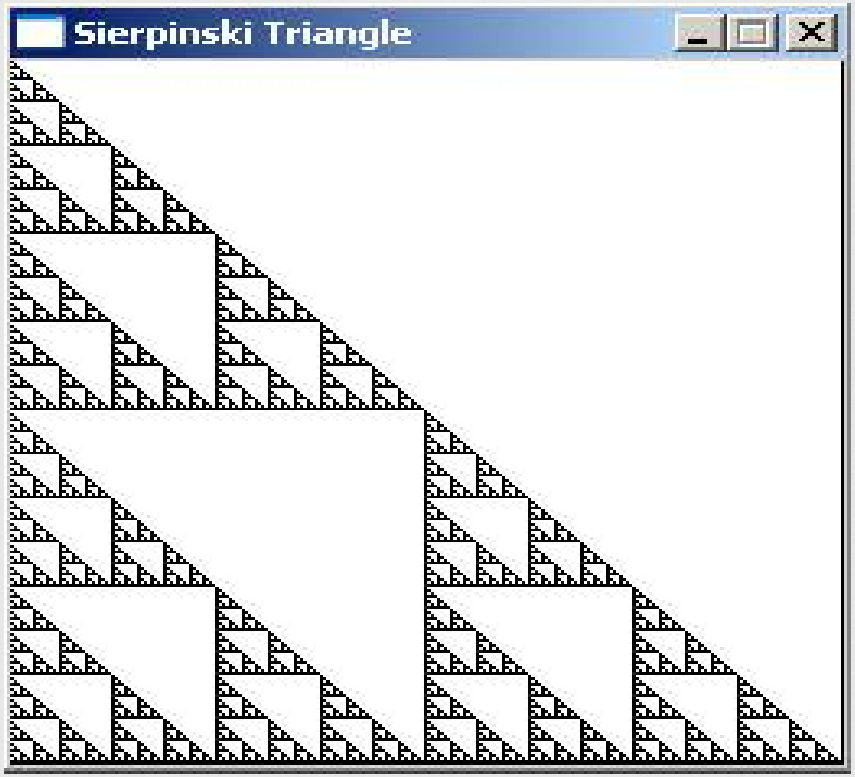
$\log(N(\frac{1}{2})^n+1)=\log(2^n(1+\frac{1}{2^n}))=\log(2^n)+\log(1+\frac{1}{2^n})$

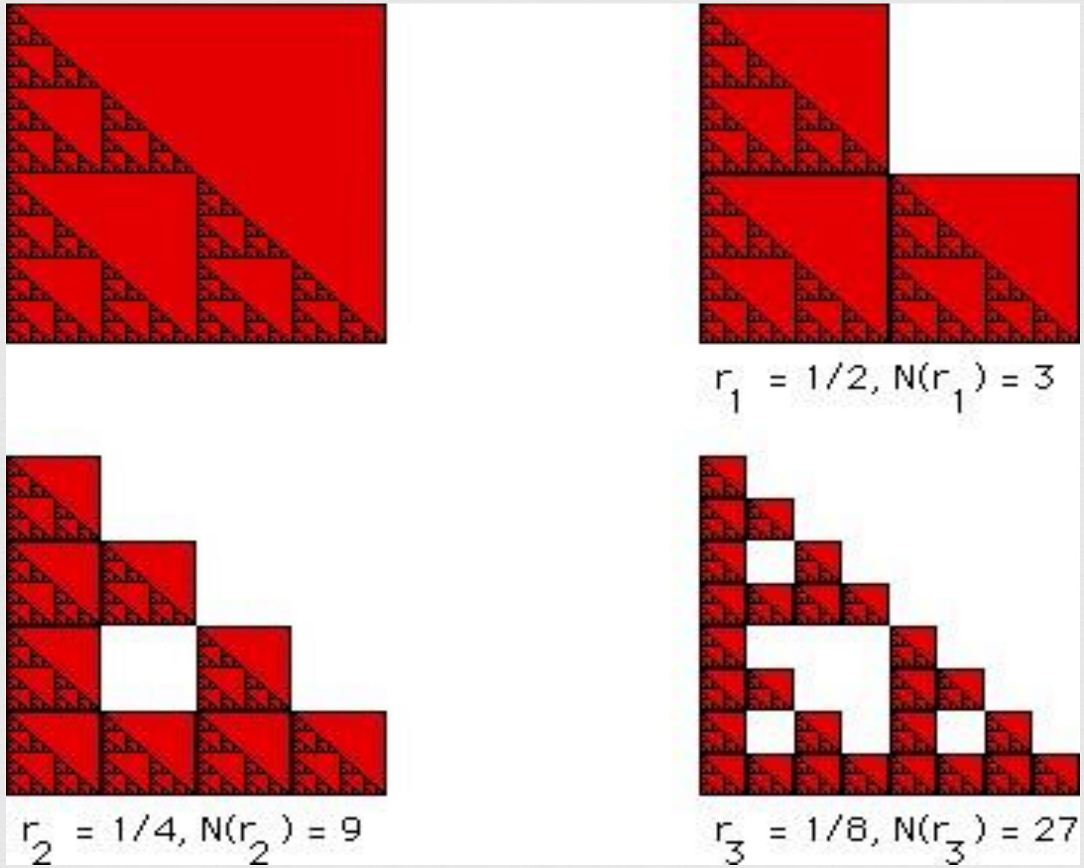
BU İFADELERİ BİRLEŞTİRELİM;

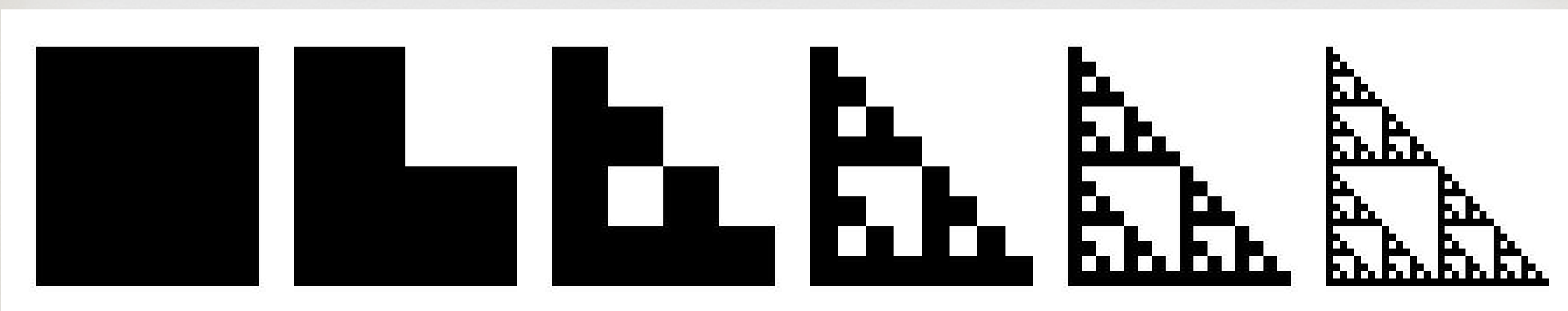
n SAYISI BÜYÜDÜKÇE (BÖYLECE $(\frac{1}{2})^{\wedge}n$ $KÜÇÜLÜR.$) ,İKİNCİ VE ÜÇÜNCÜ TERİMLER 0 A GİDER VE log(2^n) LER İLK TERİMDE SADELEŞİR .

BÖYLECE d_k =2 KALIR ,BU DA BEKLEDİĞİMİZ SONUÇTUR.

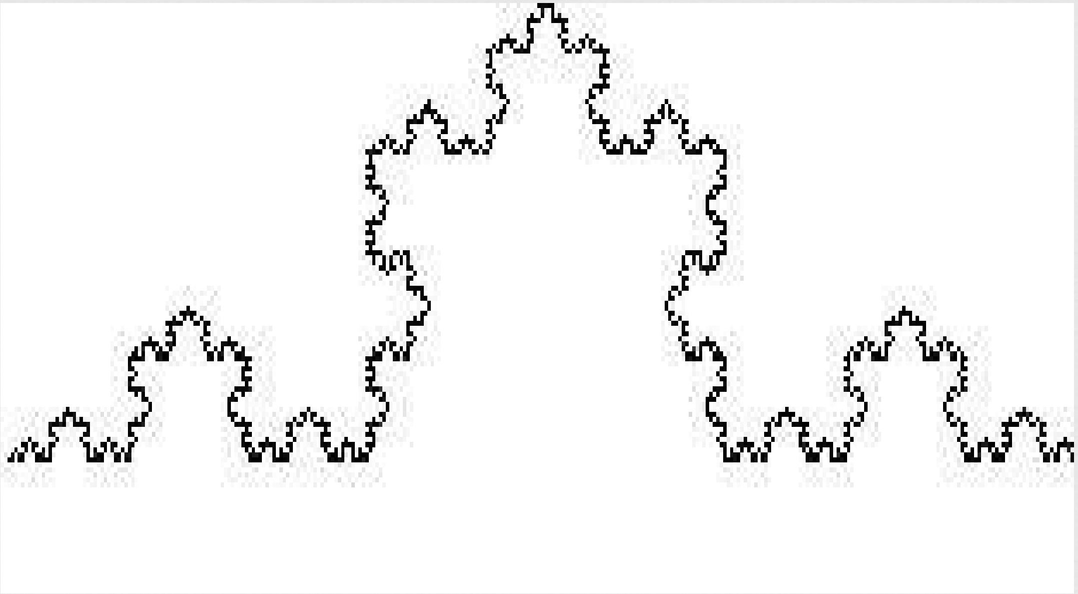
ŞİMDİ DE ;SİERSPİNSKİ ŞAPKANIN KUTU SAYMA BOYUTUNU BULALAIM;

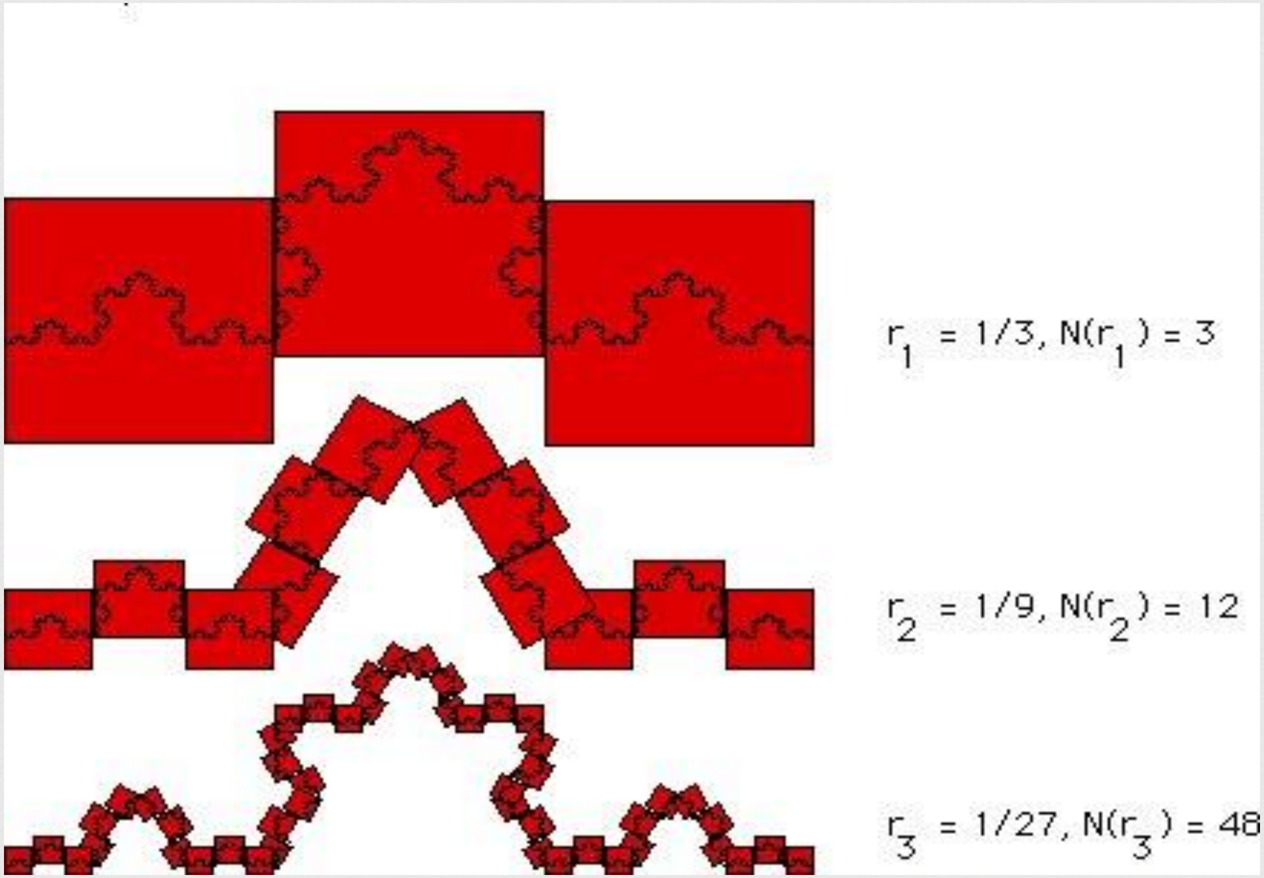



$r_1 = 1/2$, $N(r_1) = 3$
$r_2 = 1/4$, $N(r_2) = 9$
$r_3 = 1/8$, $N(r_3) = 27$

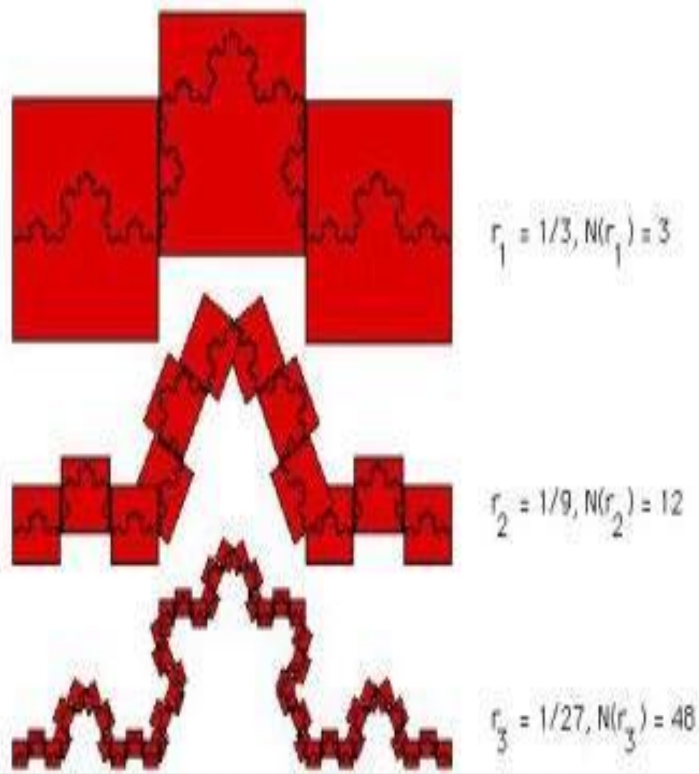


ŞİMDİ DE KOCH EĞRİSİ İÇİN KUTU SAYMA BOYUTUNU BULALALIM;

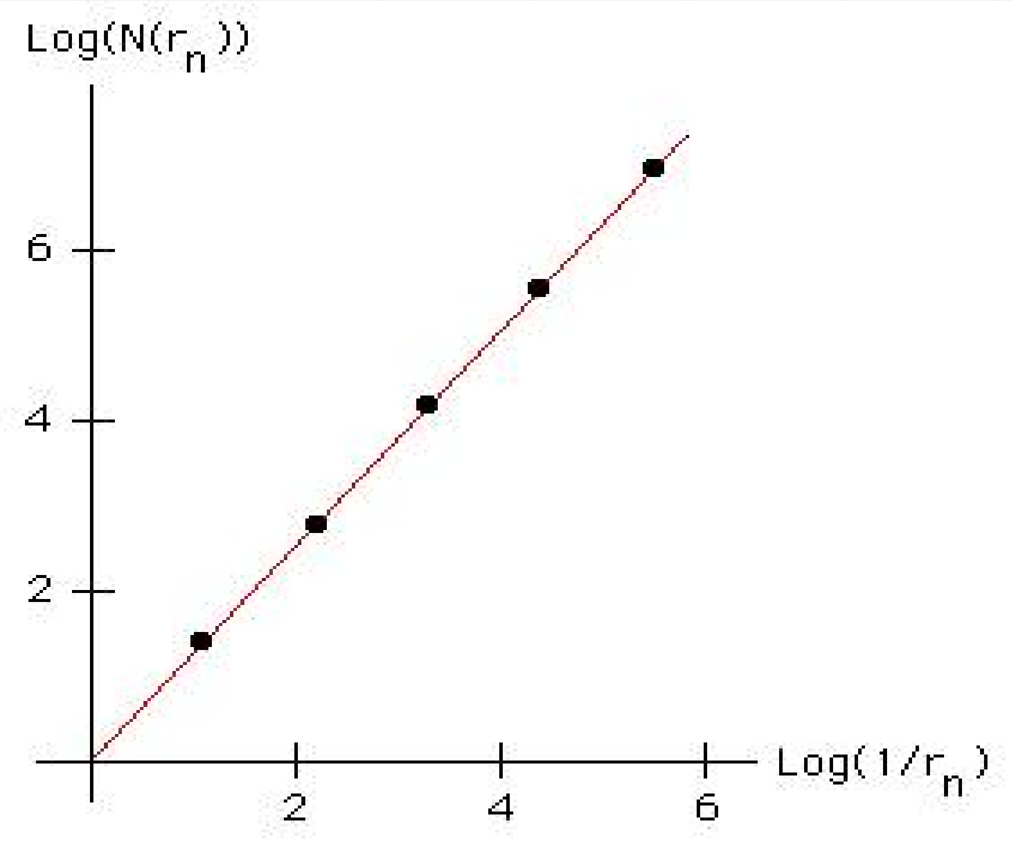




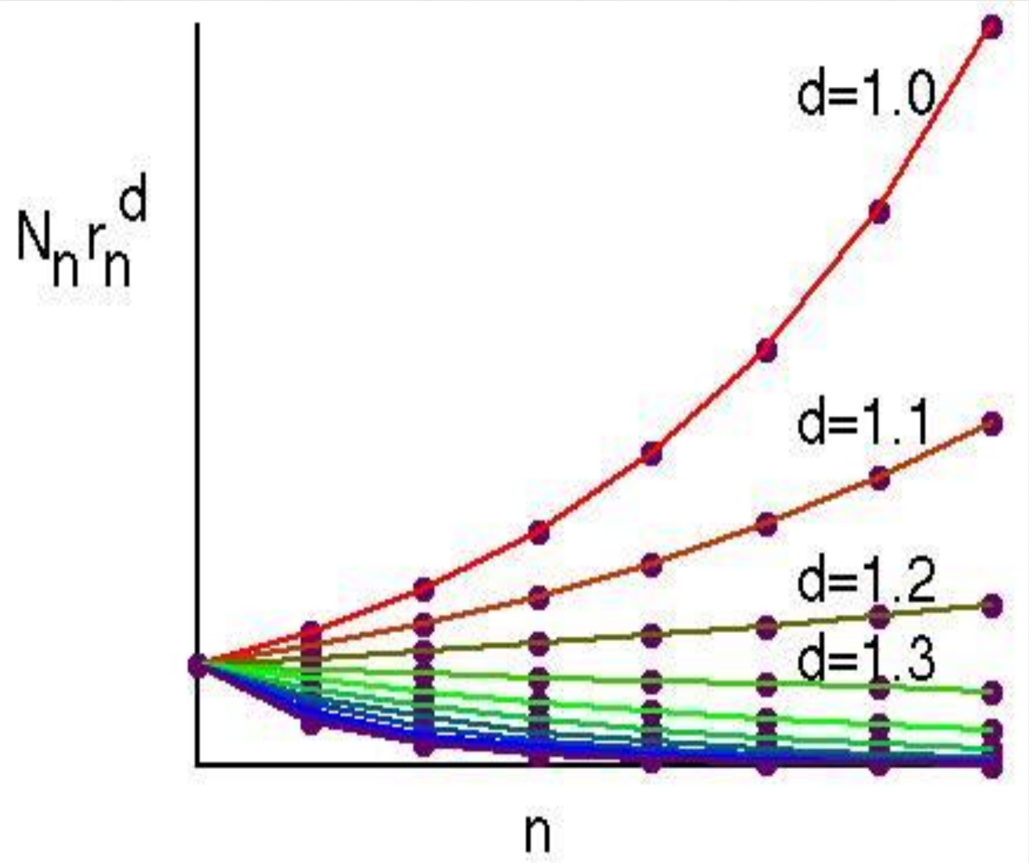
r1 = 1/3, N(r1) = 3
r2 = 1/9, N(r2) = 12
r3 = 1/27, N(r3) = 48

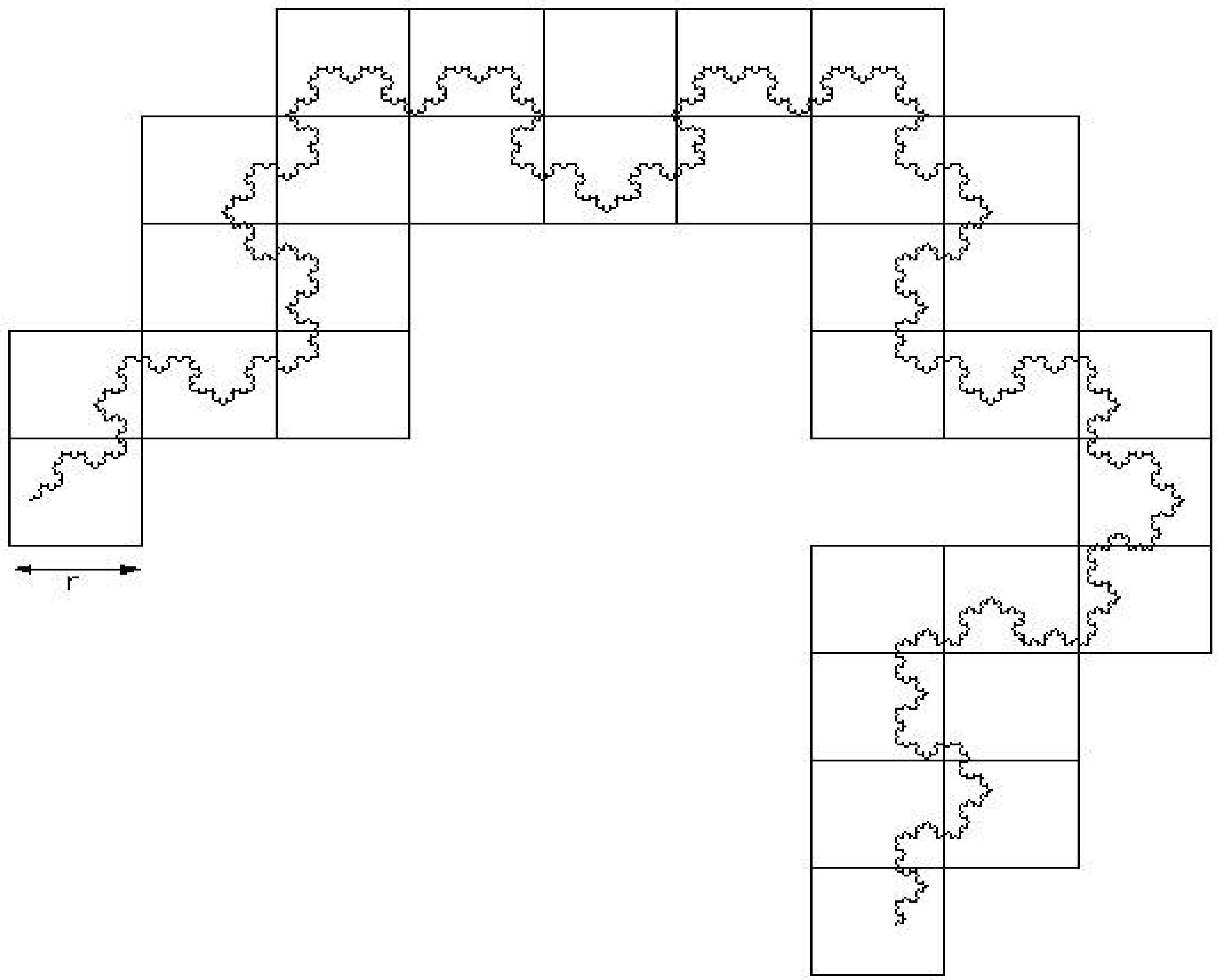


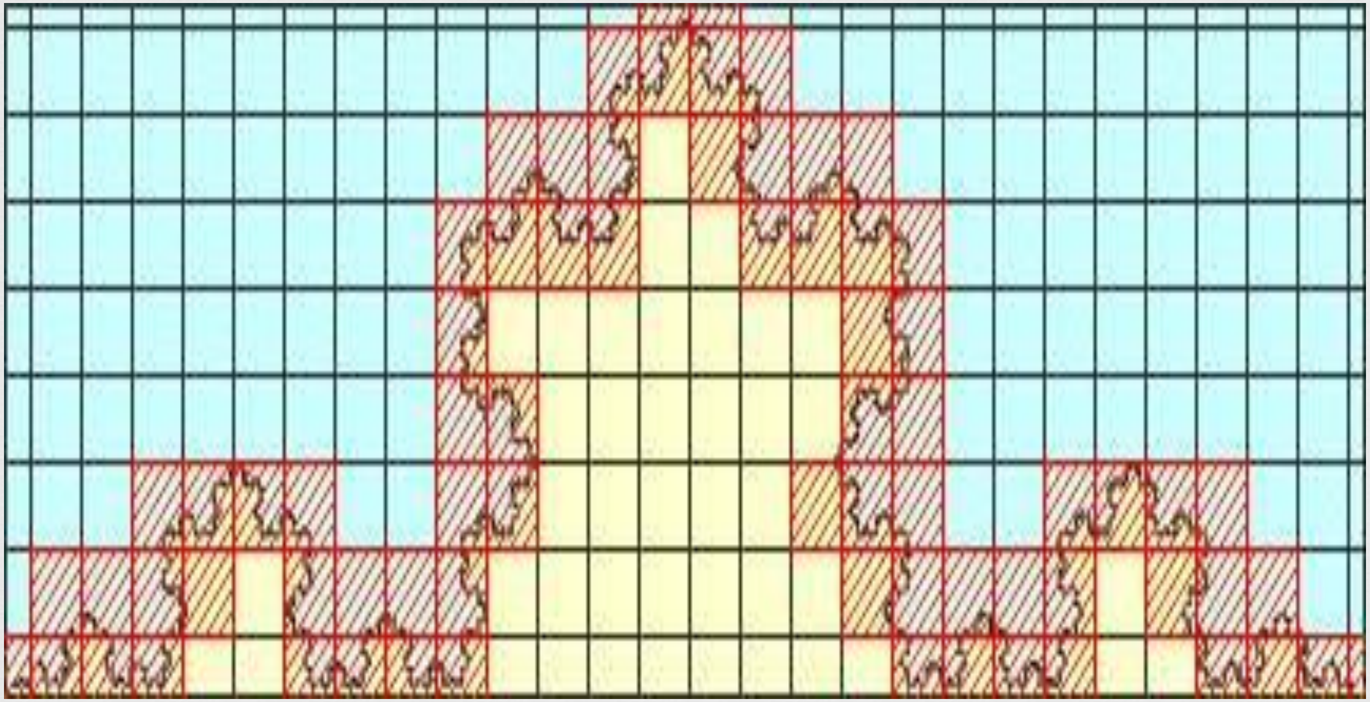
$N(1/3) = 3$
$N(1/9) = N((1/3)^2) = 12 = 3 \cdot 4$
$N(1/27) = N((1/3)^3) = 48 = 3 \cdot 4^2$
and in general
$N((1/3)^n) = 3 \cdot 4^{n-1}$



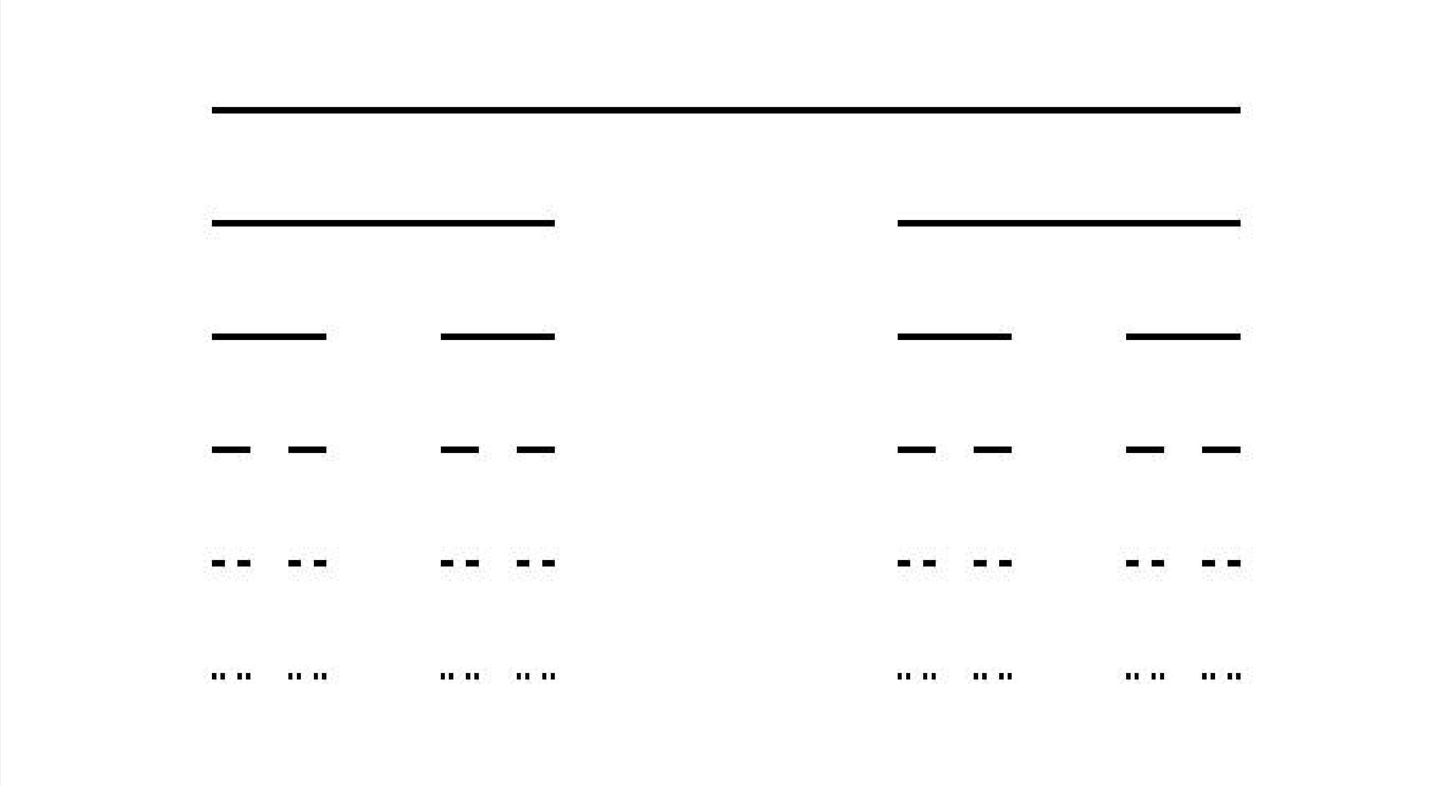
Log(N(r_n))
6
4
2
2
4
6
Log(1/r_n)

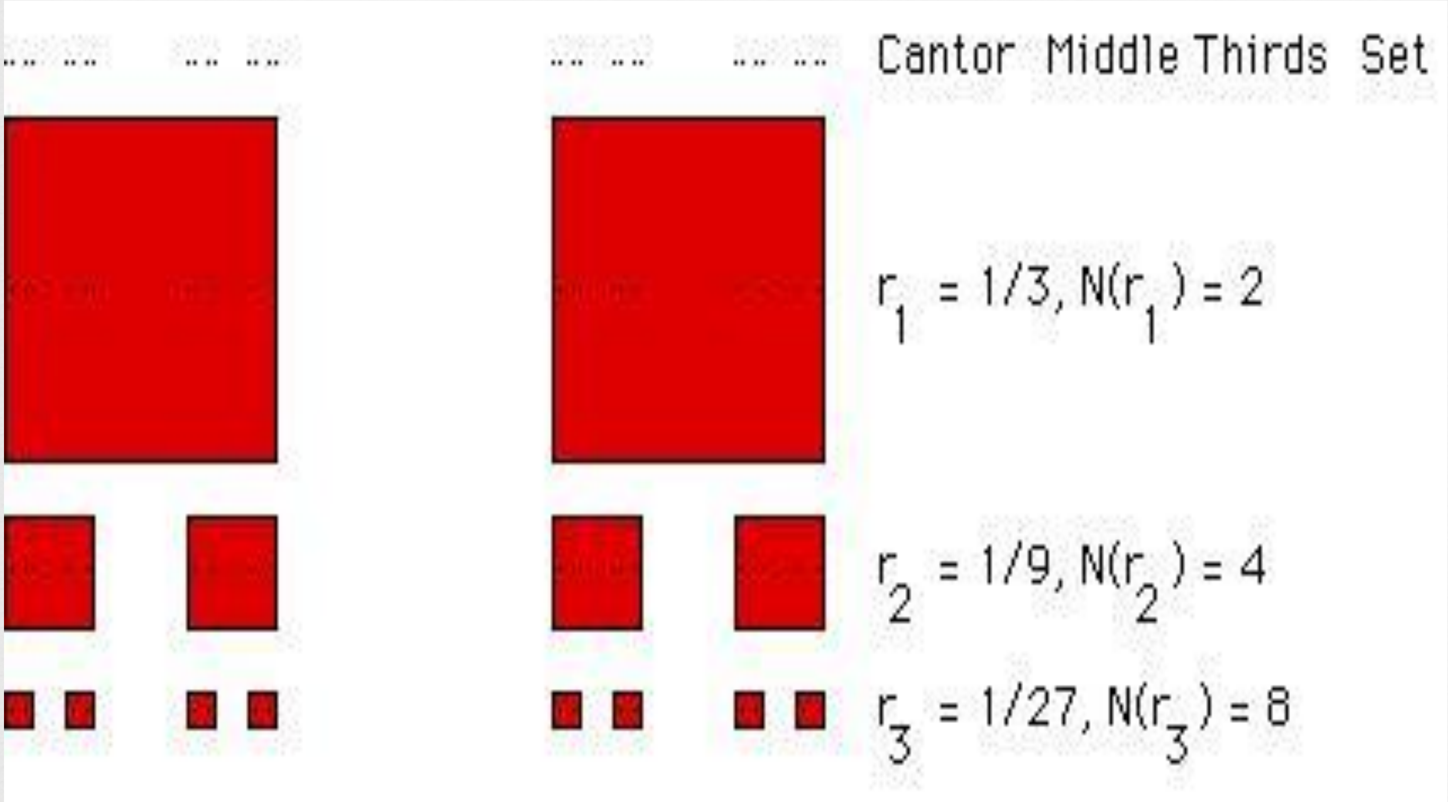

d=1.0
$N_n r_n^d$
d=1.1
d=1.2
d=1.3
n


r



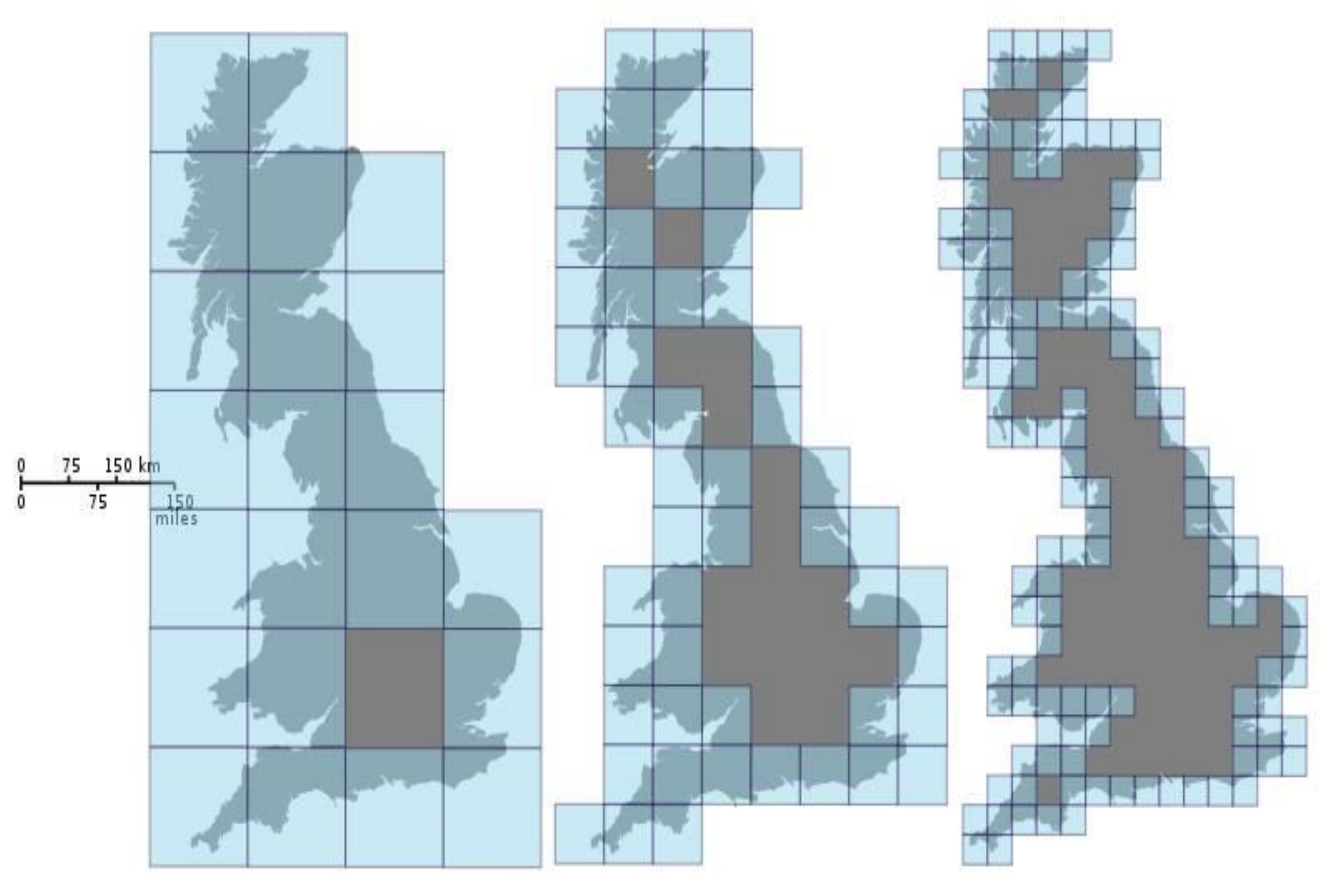
KANTOR ORTA ÜÇLÜLERİNİN KUTU SAYMA BOYUTUNU BULALALIM ;





Cantor Middle Thirds Set
r_1 = 1/3, N(r_1) = 2
r_2 = 1/9, N(r_2) = 4
r_3 = 1/27, N(r_3) = 8

KONUMUZ LA İLGİLİ GÖRSELLERE GÖZ ATALIM ;



0 75 150 km
0 75 150
miles

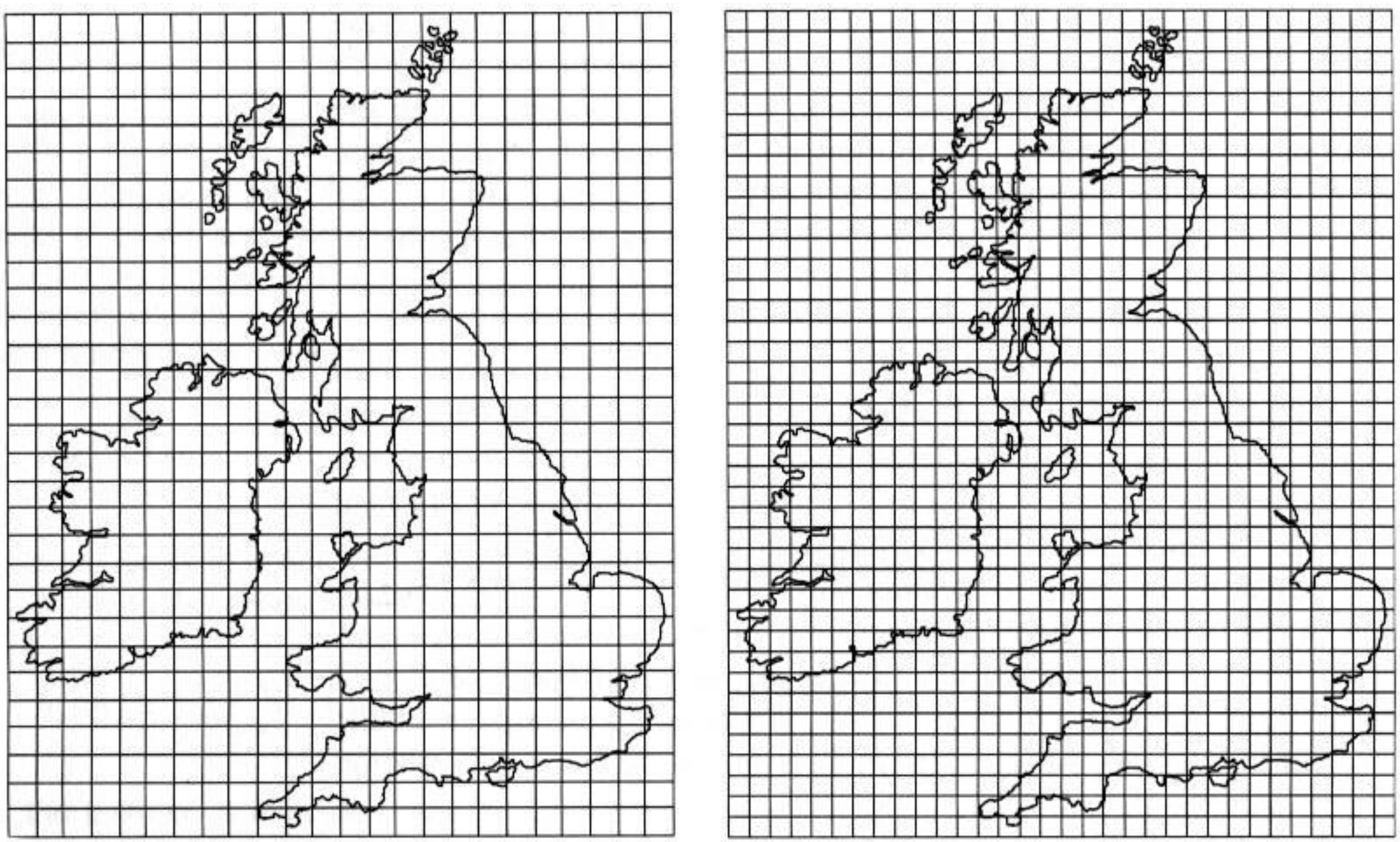
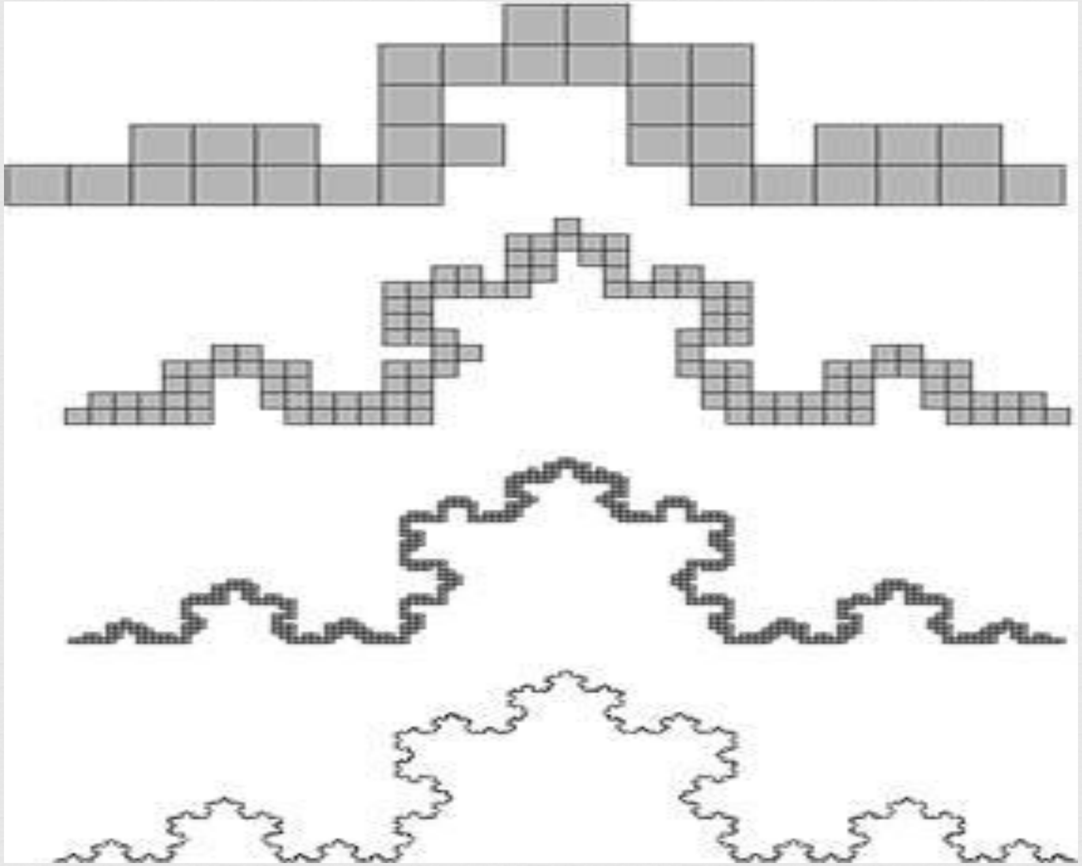
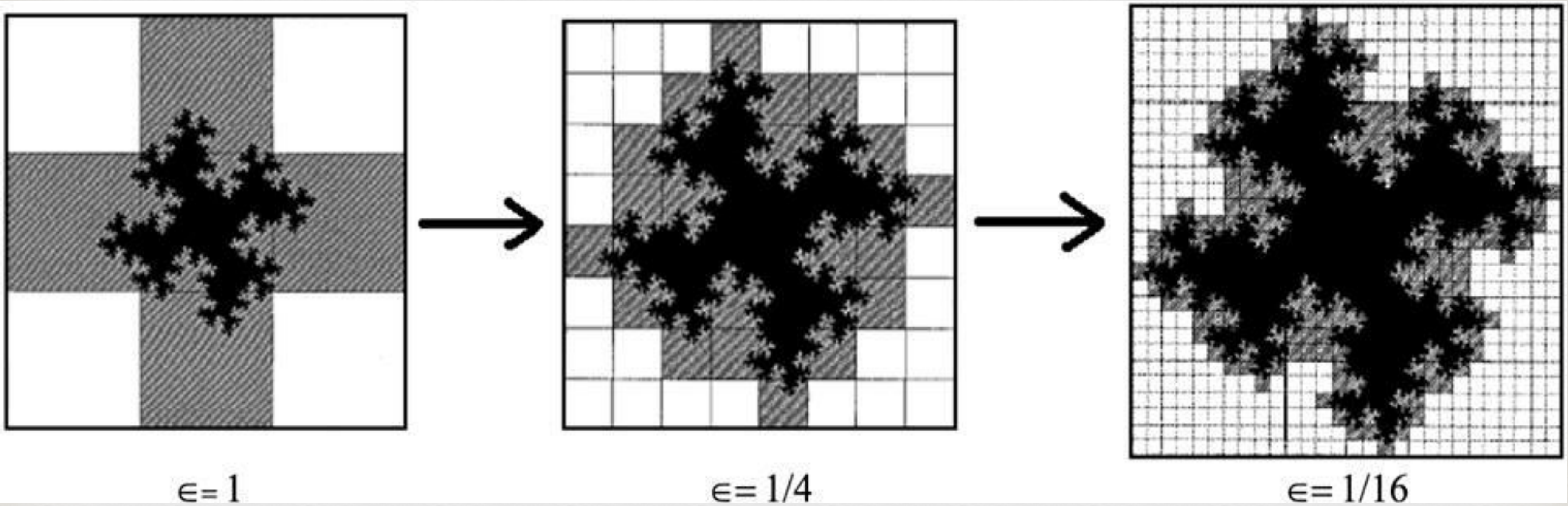


Figure 4.32 : Count all boxes that intersect (or even touch) the coastline of Great Britain, including Ireland.





∈= 1
∈= 1/4
∈= 1/16