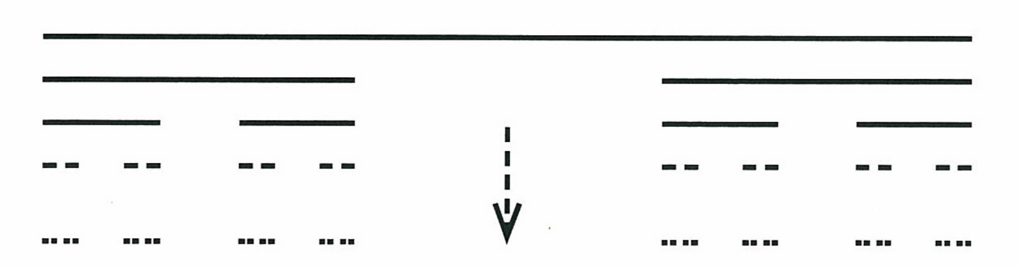
Kutu Sayma Metodu İle Boyut Hesabı

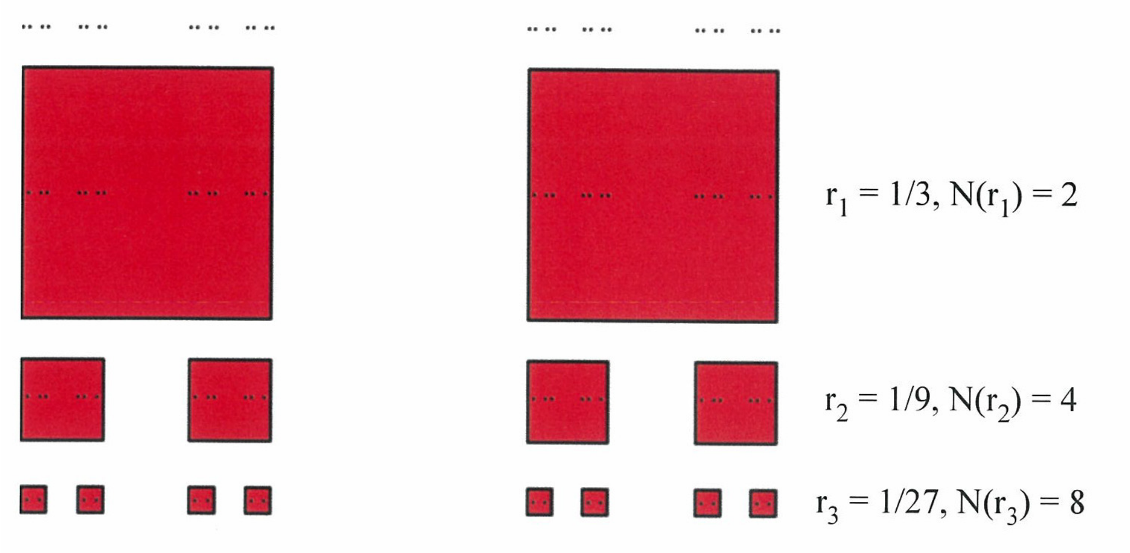
Örnek 1:

Kantor Orta Üçlülerinin Cümlesi. Birim doğru parçasının üç eşit parçaya bölünmesi ve ortadaki üçte birlik parçasının atılması, daha sonra geriye kalan iki parçanın da aynı işleme tabi tutulup ortalarındaki üçte birlik parçalarının atılması ve tekrar geriye kalan dört parçanın her biri için aynı işlemlerden sonra ortadaki parçalarının atılması ve bu işleme devam edilmesiyle oluşturulur (**Şekil 1**).



Şekil 1

Kantor cümlesinin kutu-sayma boyutunu hesaplamak için, diğer örneklerde yaptığımız gibi, git gide küçülen kutularla Kantor cümlesini örteriz (**Şekil 2**).



Şekil 2

$$N(1/3) = 2$$
$$N(1/9) = N((1/3)^2) = 4 = 2^2$$
$$N(1/27) = N((1/3)^3) = 8 = 2^3$$

ve genel olarak

$$N((1/3)^n) = 2^n$$

bulunur.

Bu fraktalın kutu-sayma boyutunu hesaplamak oldukça kolaydır:

$$\begin{aligned} d_k = \frac{\log(N((1/3)^n))}{\log(1/(1/3)^n)} &= \frac{\log(2^n)}{\log(3^n)} \\ &= \frac{n\log 2}{n\log 3} \\ &= \frac{\log 2}{\log 3} \end{aligned}$$

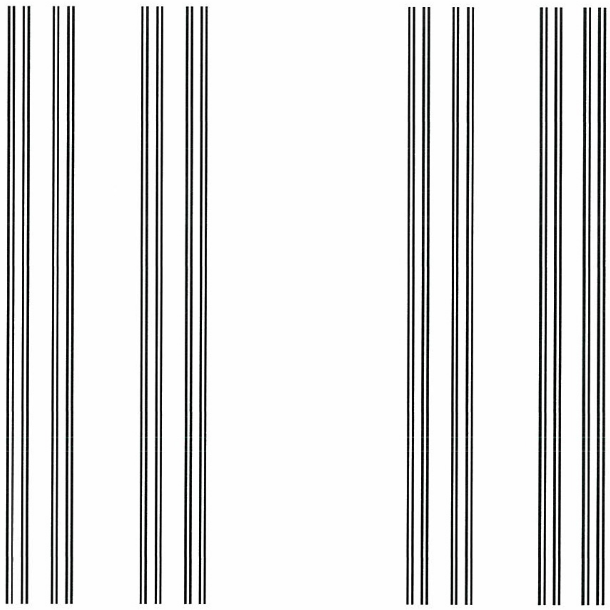
Buradan

$$\begin{aligned} d_k &= \lim_{n\to\infty} \frac{\log(N(1/3)^n)}{\log(1/(1/3)^n)} \\ &= \frac{\log 2}{\log 3} \\ &= 0.62989 \end{aligned}$$

bulunur.

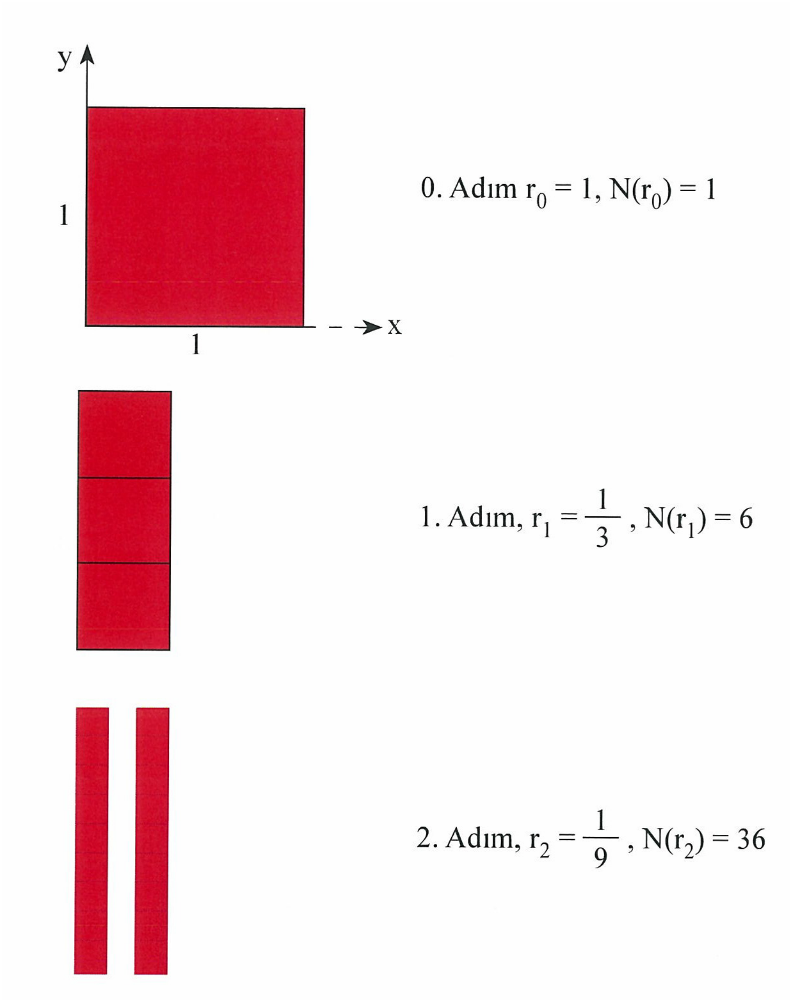
Örnek 2:

Kantor Cümlesi ve Doğru Parçasının Çarpımı: Fraktal x-yönünde Kantor cümlesi ve y-yönünde doğru parçasıdır. Bu tür oluşum **Kantor cümlesi ile doğru parçasının çarpımı** adını alır **(Şekil 3)**.



Şekil 3

Bu fraktalın kutu-sayma boyutunu hesaplamak için, onu gittikçe küçülen kare kutularla örtelim. "Kare" olması yeterli değildir. Önemli olan cümlelerin çaplarının sıfıra gitmesidir. Burada **cümle çapı**ndan kasıt cümledeki herhangi nokta çiftleri arasındaki en büyük uzaklıktır. Örneğin, bu fraktalın gittikçe kalınlaşan, herbirinin eni 1 er birim olan dikdörtgenlerle örtülmesi, fraktalın ölçeğini vermez **(Şekil 4)**.



Şekil 4

$$N(1/3) = 6 = 3 \cdot 2$$
$$N(1/9) = N((1/3)^2) = 36 = 9 \cdot 4 = 3^2 \cdot 2^2$$

ve genel olarak

$$N((1/3)^n) = 3^n \cdot 2^n$$

elde edilir.

Şekil basit olduğundan kutu-sayma boyutunu hesaplamak kolaydır:

$$\frac{\log(N(1/3)^n)}{\log(1/(\frac{1}{2})^n)} = \frac{\log(3^n \cdot 2^n)}{\log(3^n)} = \frac{n[\log 3 + \log 2]}{n \log 3} = 1 + \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Buradan

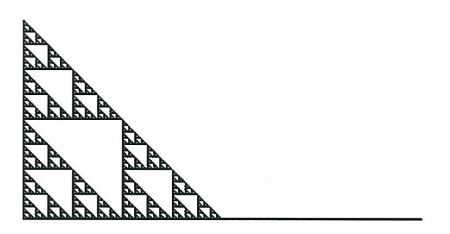
$$d_k = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(N(1/3)^n)}{\log(1/(1/3)^n)} = 1 + \frac{\log 2}{\log 3}$$

olur.

Bu sonucun Kantor cümlesi ile doğru parçasının çarpımının kutu sayma boyutu olduğuna dikkat edin.

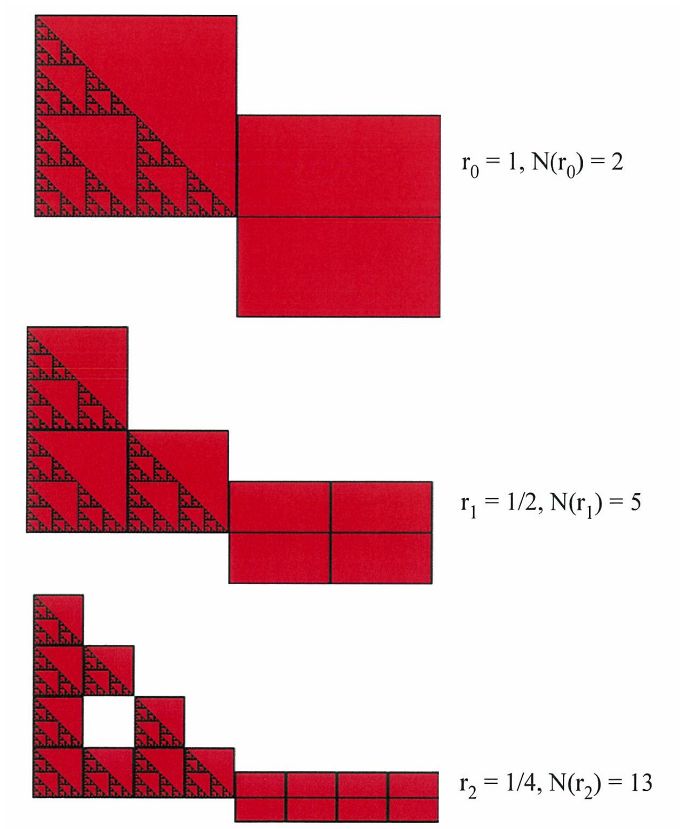
Örnek 3:

Sierpinski Şapkası ve Doğru Parçasının Birleşimi: Şapka ve doğru parçasını yan yana getirelim **(Şekil 5)**. Oluşan yeni şeklin kutu sayma boyutu nedir?



Şekil 5

Kutu-sayma boyutunu hesaplamak için, bu şekli git gide küçülen kutularla örtelim.



Şekil 6

$$N(1) = 2 = 1 + 1$$
$$N(1/2) = 5 = 3 + 2$$
$$N(1/4) = N((1/2)^2) = 13 = 9 + 4 = 3^2 + 2^2$$

ve genel olarak

$$N((1/2)^n) = 3^n + 2^n$$

bulunur. Bu bağıntıyı kullanarak kutu-sayma boyutunu hesaplayalım.

$$3^n + 2^n = 3^n(1 + (\frac{2}{3})^n)$$

ve

$$\log(3^n + 2^n) = \log(3^n(1 + (\frac{2}{3})^n)) = \log(3^n) + \log(1 + (\frac{2}{3})^n)$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \log(1 + (\frac{2}{3})^n) = \log 1 = 0$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
d_k &= \lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(N\left(\left[\frac{1}{2}\right]^n\right)\right)}{\log\left(\frac{1}{(1/2)^n}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\log(3^n + 2^n)}{\log 2^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(3^n \overbrace{(1 + \frac{2^n}{3^n})}^{1}\right)}{2^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\log 3^n}{\log 2^n} \\
&= \frac{\log 3}{\log 2}
\end{aligned}$$

olur.

Bulunan bu boyut hem doğru parçasının hem de Sierpinski şapkasının kutu-sayma boyutundan büyüktür.

Benzerlik boyutunda, bu hesapların çoğunun daha basit yolla yapılabileceğini göreceğiz. Bununla beraber kutu-sayma boyutu pek çok doğal fraktal için de bu yolla hesaplanabilir.

Alıştırmalar

1. Benzer hesaplamaları SİERPİNSKİ ŞAPKASI için de yapınız.
2. Benzer hesaplamaları SİERPİNSKİ HALISI için de yapınız.
3. Benzer hesaplamaları KARTANESİ için de yapınız.
4. Benzer hesaplamaları TERS KARTANESİ için de yapınız.
5. Bulduğunuz sonuçları önceki bulduklarınızla karşılaştırınız.