BİRİNCİ BASAMAKTAN DİFERENSİYEL DENKLEMLER

Bu bölümde

$$F(x, y, y') = 0$$

şeklindeki diferensiyel denklemler ele alınacaktır.

1. Değişkenlerine Ayrılabilen Diferensiyel Denklemler

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

denklemi

$$f(x)dx + g(y)dy = 0$$

şeklinde yazılabiliyorsa verilen denklem ayrılabilirdir denir. Bir diferensiyel denklemin ayrılabilir olması P ve Q katsayılarının f(x).g(y) biçiminde çarpanlarına ayrılabilmesine bağlıdır. Böyle denklemler değişkenlerine ayrılabilirdir. Denklemin çözümü

$$f(x)dx + g(y)dy = 0$$

denkleminin doğrudan integrali alınarak elde edilir.

Örnek 1. Aşağıdaki denklemin çözümünü elde ediniz.

$$2(y + 3)dx - xydy = 0$$

Çözüm: Verilen denklem

$$\frac{2}{x}dx = \frac{y}{y+3}dy$$
$$= \left(1 - \frac{3}{y+3}\right)dy$$

şeklinde değişkenlerine ayrılabilirdir. Yukarıdaki eşitliğin iki yanının integrali hesaplanırsa,

$$2lnx = y - 3\ln(y + 3) + lnc$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse, verilen denklemin bir parametreli çözümü

$$e^y = cx^2(y + 3)^3$$

bulunur.

Örnek 2. $(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0$ denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm:

$$\frac{dx}{1 + x^2} + \frac{dy}{1 + y^2} = 0$$

denkleminde integral alınırsa

$$arctanx + arctany = arctanc$$

ifadesi elde edilir. Bu çözümden daha iyi bir gösterim;

$$y = \frac{c - x}{1 + cx}$$

şeklindedir. (Gösteriniz)

Örnek 3.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)}$$

denkleminin y(0)=-1 koşulunu sağlayan çözümünü y=f(x) şeklinde bulunuz.

Çözüm: Verilen denklem

$$2(y - 1)dy = (3x^2 + 4x + 2)dx$$

şeklinde değişkenlerine ayrılabilirdir. Denklem integre edilirse,

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + c$$

genel çözümü elde edilir. y(0)=-1 koşulu uygulanırsa,

$$1 + 2 = c \Rightarrow c = 3$$

ve

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + 3$$

bulunur. Buradan aranan çözüm;

$$y = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}$$

şeklinde elde edilir.