

3. Homogen Diferensiyel Denkleme İndirgenebilen Denklemler

Bu kesimde

$$(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$$

şeklindeki denklemler ele alınacaktır. Bu denklemin katsayıları düzlemde birer doğru belirtirler. Burada c_1 ve c_2 katsayıları aynı anda sıfır olmayacak şekilde kabul edilmiştir. (Dikkat edilirse $c_1 = c_2 = 0$ durumunda denklem homogen diferensiyel denkleme indirgenir.) Bu tip denklemler katsayıları oluşturan doğruların paralel olması ya da kesişmesi durumlarına göre iki kısımda incelenir.

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

doğrularını göz önüne alalım.

$$\Delta = a_1b_2 - a_2b_1$$

olsun.

I. Durum: İlk olarak doğruların paralel olması halini göz önüne alalım. Bu durumda

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

olup $\Delta = 0$ 'dır. Böyle bir durumda katsayılardaki en sade $ax + by$ ikilisine yeni bir değişken gözüyle bakılır.

$$a_1x + b_1y = u$$

değişken değiştirmesi ile verilen denklem değişkenlerine ayrılabilen diferensiyel denkleme indirgenir. (Bu dönüşümün $a_2x + b_2y = u$ ile de tanımlanabileceğine dikkat ediniz.)

II. Durum: $\Delta \neq 0$ durumunda doğrular orjinden farklı bir noktada kesişirler. (Nedenini açıklayınız.) Bu doğruların kesim noktası (h, k) olsun. Denklemden

$$\begin{aligned} x &= X + h \\ y &= Y + k \end{aligned}$$

öteleme dönüşümleri yapılırsa elde edilen yeni denklem

$$(a_1X + b_1Y)dX + (a_2X + b_2Y)dY = 0$$

biçiminde homogen bir diferensiyel denklem olacaktır. Yeni doğruların kesim noktalarının orjin noktası olduğuna dikkat ediniz.

Örnek 1.

$$(2x - y)dx + (4x - 2y + 1)dy = 0$$

denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. $\Delta = 2(-2) - 4(-1) = 0$ olduğundan doğrular paraleldir. Bu durumda denklemde $2x - y = u$ değişken değiştirmesi yapılırsa, $dy = 2dx - du$ olup

$$udx + (2u + 1)(2dx - du) = 0$$

$$\Rightarrow (5u + 2)dx - (2u + 1)du = 0$$

şeklinde değişkenlerine ayrılabilen denklem elde edilir. Buradan,

$$\frac{2u + 1}{5u + 2} du = dx$$

olup basit kesirlerine ayırma ile,

$$\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5} \frac{1}{5u + 2} \right) du = dx$$

elde edilir. Bu son denklemin integrali hesaplanırsa,

$$\frac{2}{5}u + \frac{1}{25} \ln(5u + 2) - x = c'$$

bulunur. $2x - y = u$ yerine yazılırsa verilen denklemin genel çözümü

$$-5x - 10y + \ln(10x - 5y + 2) = c$$

biçiminde elde edilir. (Burada $25c' = c$ alınmıştır.)

Örnek 2.

$$(x + 2y - 2)dx - (y - 2x - 1)dy = 0$$

denkleminin çözümünü bulalım.

$$x + 2y - 2 = 0$$

$$y - 2x - 1 = 0$$

doğruları için $\Delta \neq 0$ olup doğruların kesim noktası $(0,1)$ dir. Buna göre denklemde

$$\begin{cases} x = X \\ y = Y + 1 \end{cases}$$

dönüşümleri yapılırsa elde edilen yeni denklem

$$(X + 2Y)dX - (Y - 2X)dY = 0$$

şeklindeki homogen diferensiyel denklemdir.

$$\frac{dY}{dX} = \frac{2Y + X}{Y - 2X}$$

denkleminde

$$\frac{Y}{X} = u$$

dönüşümü yapılırsa,

$$u + Xu' = \frac{2u + 1}{u - 2}$$

denklemini elde edilir. Bu denklem

$$\frac{u - 2}{u^2 - 4u - 1} du + \frac{dX}{X} = 0$$

şeklinde değişkenlerine ayrılabilen bir diferensiyel denklemdir. Bu denklemin integrali alınır,

$$\ln(u^2 - 4u - 1) + 2\ln X = \ln c$$

ve düzenlenirse,

$$(u^2 - 4u - 1)X^2 = c$$

olup,

$$\frac{Y}{X} = u \Rightarrow Y^2 - 4XY - X^2 = c$$

çözümüne ulaşılır. Son olarak $X = x$, $Y = y - 1$ değişkenleri yerlerine yazılırsa verilen denklemin genel çözümü

$$y^2 - 2y - 4xy + 4x - x^2 = c$$

biçiminde elde edilir.