4. Tam Diferensiyel Denklemler

Tanım 1.

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{1}$$

denkleminin sol tarafı bir *f(x,y)* fonksiyonunun diferensiyelini almakla elde edilebiliyorsa ya da başka bir ifadeyle

$$df(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

olacak şekilde bir *f(x,y)* fonksiyonu mevcutsa verilen denkleme tam diferensiyel denklem adı verilir.

Eğer $P(x,y)$ ve $Q(x,y)$ fonksiyonları sürekli ve xy-düzlemi üzerinde bir dikdörtgensel bölge üzerinde birinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip olsun.

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

eşitliği sağlanıyor ise, bu durumda (1) diferensiyel denklemi bir tam diferensiyel denklemdir. Bu durumda

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P(x,y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = Q(x,y)$$

eşitlikleri sağlanacak şekilde bir *f(x,y)* fonksiyonu mevcuttur ve verilen denklemin genel çözümü *c* keyfi integral sabiti olmak üzere;

$$f(x,y) = c$$

şeklindedir.

Örnek 1. $(y + 2xy^3)dx + (1 + 3x^2y^2 + x)dy = 0$ denkleminin genel çözümünü elde ediniz.

Çözüm. $P(x,y) = (y + 2xy^3)\ ve\ Q(x,y) = (1 + 3x^2y^2 + x)$ için

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 1 + 6xy^2 = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

olduğundan verilen denklem tam diferensiyel denklemdir. Buna gore;

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + 2xy^3 \tag{2a}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 + 3x^2y^2 + x \tag{2b}$$

eşitlikleri sağlanacak şekilde bir $f(x,y)$ fonksiyonu mevcuttur. (2a) eşitliğinin her iki yanının *x'*e gore integrali alınırsa;

$$f(x,y) = xy + x^2y^3 + h(y) \tag{3}$$

elde edilir. Son ifadenin y'e göre türevi alınırsa;

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + 3x^2y^2 + h'(y)$$

elde edilir. Dikkat edilirse bu son denklem ile (2b) eşitliğinin sol tarafları birbirine eşittir. Dolayısıyla sağ taraflar da birbirine eşitlenerek;

$$h^{'}(y) = 1$$

ve buradan

$$h(y) = y + c_1$$

bağıntısı elde edilir. Burada c_1 integral sabitidir. *h(y)*'nin (3)'de yerine yazılmasıyla aranan fonksiyon;

$$f(x,y) = xy + x^2y^3 + y + c_1$$

şeklinde elde edilir. Buna gore diferensiyel denklemin genel çözümü;

$$xy + x^2y^3 + y = c$$

biçiminde elde edilir.

Örnek 2. $2xe^{2y}dy + (1 + e^{2y})dx = 0$ denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm.

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 2e^{2y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

olduğundan denklem tam diferensiyel denklemdir. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + e^{2y} \tag{4a}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xe^{2y} \tag{4b}$$

(4a) eşitliğinin iki yanının *x*'e göre integrali alınırsa

$$f(x,y) = x + xe^{2y} + h(y) \tag{5}$$

ede edilir. *h(y)* fonksiyonunu bulmak için (5) eşitliğinin *y*'ye göre türevi hesaplanırsa,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xe^{2y} + h'(y)$$

elde edilir. (4b) eşitliği göz önüne alınırsa,

$$h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = c_1$$

elde edilir. Buradan verilen diferensiyel denklemin genel çözümü;

$$x + xe^{2y} = c$$

biçiminde elde edilir.