5. İntegral Çarpanı

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

diferensiyel denkleminin tam diferensiyel denklem olmadığını kabul edelim. Bu durumda denklem ile çarpıldığında, denklemi tam diferensiyel yapan bir $\lambda = \lambda(x,y)$ çarpanına "integral çarpanı" adı verilir. İntegral çarpanı için ele alınacak bazı özel durumlar aşağıda verilmiştir:

I. Durum. Sadece *x* değişkenine bağlı integral çarpanının bulunması:

Eğer $\frac{P_y - Q_x}{Q} = f(x)$ şeklinde ise, bu durumda verilen diferensiyel denklem sadece *x* değişkenine bağlı bir integral çarpanını kabul eder ve bu çarpan

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} dx = \frac{d\lambda}{\lambda}$$

denkleminin çözümünden elde edilir.

II. Durum. Sadece *y* değişkenine bağlı integral çarpanının bulunması:

Eğer $\frac{P_y - Q_x}{-P} = f(y)$ şeklinde ise, bu durumda verilen diferensiyel denklem sadece *y* değişkenine bağlı bir integral çarpanını kabul eder ve bu çarpan

$$\frac{P_y - Q_x}{-P} dy = \frac{d\lambda}{\lambda}$$

denkleminin çözümünden elde edilir.

III. Durum. Sezgisel yolla integral çarpanının bulunması:

Bazı özel durumlarda eğer aşağıdaki tam diferensiyel özdeşlikler verilen denklemde varsa (ya da bazı düzenlemelerle elde edilebiliyorsa), diferensiyel denklem doğrudan tam diferensiyel hale getirilebilir ve bu haliyle integrali alınarak çözülebilir.

1. $xdx + ydy = \frac{1}{2}d(x^2 + y^2)$

2. $xdy + ydx = d(xy)$

3. $\frac{xdy - ydx}{x^2} = d(\frac{y}{x})$

4. $\frac{ydx - xdy}{y^2} = d(\frac{x}{y})$

5. $\frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = d(\arctan\frac{y}{x})$

IV. Durum. $\lambda = \lambda(u(x,y))$ olmak üzere, u'nun bir fonksiyonu cinsinden integral çarpanının bulunması.

Eğer, $\frac{P_y - Q_x}{Qu_x - Pu_y} = f(u)$şeklinde ise, verilen denklem $\lambda = \lambda(u)$ şeklinde yani u'nun bir fonksiyonu şeklinde bir integral çarpanı kabul eder ve bu çarpan da;

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{P_y - Q_x}{Qu_x - Pu_y} du$$

denkleminin çözümünden elde edilir.

Örnekler. Aşağıdaki diferensiyel denklemlerin çözümlerini uygun bir integral çarpanı yardımıyla elde ediniz.

1. $(3y - 2x)dx + xdy = 0$ denklemi için,

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{2}{x}$$

olduğundan integral çarpanı,

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{2}{x} dx \Longrightarrow \lambda = x^2$$

Şeklinde elde edilir. Bu durumda verilen denklem integral çarpanı ile çarpılarak;

$$(3x^2y - 2x^3)dx + x^3dy = 0$$

şeklinde tam diferensiyel denkleme dönüştürülür. Bu denklemin çözümü okuyucuya bırakılmıştır.

2. $y^2dx + xydy = 0$ denklemi için

$$\frac{P_y - Q_x}{-P} = \frac{-1}{y}$$

Olduğundan aranan integral çarpanı,

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = -\frac{1}{y} dy \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{y}$$

dir. Gerçekten denklem $\lambda = \frac{1}{y}$ ile çarpıldığında,

$$ydx + xdy = 0$$

tam diferensiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin genelçözümü de

$$xy = c$$

dir.

3. $(y - xy^2)dx + (x + x^2y^2)dy = 0$ denklemi sadece x'e veya sadece y'ye bağlı integral çarpanını Kabul etmez. Bu denklemde aşağıdaki düzenlemeler yapılırsa sezgisel yolla integral çarpanı bulunabilir;

$$(ydx + xdy) + (x^2y^2dy - xy^2dx) = 0$$

$$d(xy) + x^2y^2\left(dy - \frac{1}{x}dx\right) = 0$$

denklem x^2y^2 ile bölünürse

$$\frac{d(xy)}{(xy)^2} + dy - \frac{1}{x}dx = 0$$

tam diferensiyel denklemi elde edilir. Doğrudan integral ile

$$\frac{-1}{xy} + y - lnx = c$$

genel çözümü bulunur. Burada integral çarpanının $\lambda = x^2y^2$ olduğuna dikkat ediniz.

4. $(2y - xy^2)dx + (2x + x^2y)dy = 0$ denkleminin çözümünü, xy'nin bir fonksiyonu cinsinden yani $\lambda = \lambda(xy)$ biçiminde bir integral çarpanı yardımıyla elde ediniz.

$xy = u$ denirse λ=λ(u)

olup

$$\frac{P_y - Q_x}{Qu_x - Pu_y} = -\frac{2}{xy} = -\frac{2}{u}$$

Eşitliğinden aranan integral çarpanı

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{-2}{u}du \Longrightarrow \lambda = u^{-2} \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{x^2y^2}$$

biçiminde elde edilir. Çözüm okuyucuya bırakılmıştır.