

Birinci Basamaktan Diferensiyel Denklemlerin Uygulamaları

1. Yörüngeler

$$F(x, y, c) = 0 \quad (1)$$

xy - düzleminde verilen bir parametrelili eğri ailesini gösterebiliriz.

Tanım 1. (1) ile verilen eğri ailesini dik açı altında kesen eğri ailesine (1) in dik yörüngeleridir denir.

(1) in dik yörüngelerini bulmak için ilk olarak (1) denkleminin her iki yanının diferensiyeli hesaplanır ve c parametresinin içerilmediği

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (2)$$

diferensiyel denklemi elde edilir. (1) in dik yörüngeleri

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x, y)} \quad (3)$$

diferensiyel denkleminin bir parametrelili çözümü olan

$$G(x, y, k) = 0$$

eğri ailesidir.

Tanım 2. (1) ile verilen eğri ailesini $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ açısı altında kesen eğri ailesine (1) in eğik yörüngeleridir denir.

(1) in eğik yörüngeleri $f(x, y)$ fonksiyonu (2) de belirlendiği gibi olmak üzere

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y) + \tan \alpha}{1 - f(x, y) \tan \alpha} \quad (4)$$

diferensiyel denkleminin bir parametrelili çözüm ailesidir.

Örnek 1. $y = cx^2$ parabol ailesinin dik yörüngelerini bulunuz, burada c keyfi sabittir.

Çözüm. Verilen denklemin her iki yanının diferensiyeli alınıp, elde edilen diferensiyel denklemde $c = \frac{y}{x^2}$ olduğu ve (3) eşitliği dikkate alınrsa, aranan eğri ailesinin diferensiyel denklemi

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y} \quad (5)$$

bulunur. (5) diferensiyel denklemlerini değişkenlerine ayrılabilen bir denklemler olup integre edildiğinde verilen ailenin dik yörüngeleri

$$2y^2 + x^2 = c^2$$

olarak bulunur.

Örnek 2. $x^2 + y^2 = c^2$ çemberler ailesini $\alpha = \frac{\pi}{4}$ açısı altında kesen eğik yörünge ailesini bulunuz, burada c keyfi sabittir.

Çözüm. Verilen eğri ailesinin her iki yanının diferensiyeli alınırsa

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

diferensiyel denklemler elde edilir. O halde $f(x, y) = -\frac{x}{y}$ olup (4) eşitliği göz önüne alınırsa aranan eğri ailesinin diferensiyel denklemler

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{y + x} \tag{6}$$

elde edilir. (6) denklemler bir homogen diferensiyel denklemler olup $y = xv$, $v = v(x)$ değişken değiştirmesi yapılarak çözüldüğünde aranan eğik yörünge ailesi

$$\ln c^2(x^2 + y^2) + 2 \arctan \frac{y}{x} = 0$$

olarak bulunur.