Belirsiz Katsayılar Yöntemi

Bu bölümde sabit katsayılı homogenolmayan

$$a_0\frac{d^n y}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+...+a_{n-1}\frac{dy}{dx}+a_n y=b\left(x\right) \tag{1}$$

diferensiyel denklemi ele alınacaktır, burada $a_0,...,a_n$ reel sabitlerdir. (1) denklemine ilişkin homogen

$$a_0\frac{d^n y}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+...+a_{n-1}\frac{dy}{dx}+a_n y=0 \tag{2}$$

denkleminin genel çözümü y_c, (1) denkleminin bir özel çözümü y_p olmak üzere (1) denkleminin genel çözümünün

$$y(x)=y_c+y_p$$

şeklinde olduğunu biliyoruz. Bu bölümde y_c özel çözümünün bulunmasına ilişkin yöntemler açıklanacaktır.

I. Durum. $b(x)$, $m-$yinci dereceden bir polinom olsun. Bu durumda (1) denkleminin bir özel çözümü

$$y_p=A_0+A_1x+...+A_mx^m$$

formundadır, burada $A_0,A_1,...,A_m$ belirlenmesi gereken sabitlerdir.

Uyarı 1. (2) denklemine ilişkin karakteristik denklemin r tane kökü katlı ise, bu durumda (1) denkleminin bir özel çözümü

$$y_p=x^r(A_0+A_1x+...+A_mx^m)$$

formundadır.

Örnek 1.

$$y^{''}+2y^{'}+2y=x+1 \tag{3}$$

denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. $y^{''}+2y^{'}+2y=0$ homogen denklemine ilişkin karakteristik denklem

$$\lambda^2+2\lambda+2=0$$

ve kökleri $\lambda_{1,2}=-1\pm i$ olup $y_c=e^{-x}\left(c_1\cos x+c_2\sin x\right)$ dir. Buna göre (3) denkleminin bir özel çözümü

$$y_p=Ax+B$$

formundadır. y_p ve türevleri verilen denklemde yerine yazılıp düzenlenirse $A=\frac{1}{2}$, $B=0$ bulunur. O halde $y_p=\frac{1}{2}x$ ve genel çözüm

$$y(x)=e^{-x}\left(c_1\cos x+c_2\sin x\right)+\frac{1}{2}x$$

elde edilir.

Örnek 2. $y'' - y' = x^2$ denkleminin bir özel çözümünü bulunuz. (Yol Gösterme: $y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx$ şeklinde özel çözüm arayınız.)

II. Durum. $b(x) = e^{\alpha x}$ üstel fonksiyon olsun. Bu durumda (1) denkleminin bir özel çözümü

$$y_p = Ae^{\alpha x}$$

formundadır, burada A belirlenmesi gereken sabittir.

Uyarı 2. Eğer α, (2) denklemine ilişkin karakteristik denklemin r katlı bir kökü ise, bu durumda (1) denkleminin bir özel çözümü

$$y_p = Ax^r e^{\alpha x}$$

formundadır.

Örnek 3.

$$y'' - 9y = e^{2x}$$

denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. $y'' - 9y = 0$ homogen denkleminin genel çözümü $y_c = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$ dir. $\alpha = 2$ olduğundan özel çözüm modeli $y_p = Ae^{2x}$ dir. y_p ve türevleri verilen denklemde yerine yazılıp düzenlenirse $A = -\dfrac{1}{5}$ bulunur. Buradan verilen denklemin genel çözümü

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} - \frac{1}{5} e^{2x}$$

elde edilir.

Örnek 4. $y'' - 2y' + y = 5e^x$ denkleminin bir özel çözümünü bulunuz.

III. Durum. $b(x) = \alpha_1 \cos\beta x + \alpha_2 \sin\beta x$ olsun. Bu durumda (1) denkleminin bir özel çözümü

$$y_p = A\cos\beta x + B\sin\beta x$$

formundadır, burada A ve B belirlenmesi gereken sabitlerdir.

Uyarı 3. Eğer $\lambda = i\beta$, (2) denklemine ilişkin karakteristik denklemin r katlı bir kökü ise, bu durumda (1) denkleminin bir özel çözümü

$$y_p = x^r\left(A\cos\beta x + B\sin\beta x\right)$$

formundadır.

Örnek 5.

$$y'' - 2y' = \sin 2x$$

denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. $y'' - 2y' = 0$ homogen denklemin genel çözümü $y_c = c_1 + c_2 e^{2x}$ dir. Verilen denklemin bir özel çözümü

$$y_p = A\cos 2x + B\sin 2x$$

formunda aranırsa, $A = \frac{1}{8}$ ve $B = -\frac{1}{8}$ bulunur. Buradan verilen denklemin genel çözümü

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{2x} + \frac{1}{8}\cos 2x - \frac{1}{8}\sin 2x$$

elde edilir.

Örnek 6. $y'' + 4y = -\cos 2x$ denkleminin bir özel çözümünü bulunuz.