Laplace Dönüşümleri

Tanım 1. f, $x \geq 0$ için tanımlı bir fonksiyon ve s bir reel parametre olmak üzere

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx \tag{1}$$

genelleştirilmiş integrali yakınsak ise, integralin değerine f fonksiyonunun Laplace dönüşümü denir ve $F = \mathcal{L}\{f\}$ ile gösterilir.

Örnek 1. $f(x) = 1$ in Laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm. (1) den

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty e^{-sx} dx \\ &= \lim_{b\to\infty} \frac{1-e^{-sb}}{s} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{s}, & s > 0, \\ \infty, & s < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan $s = 0$ için de $F(s)$ integrali ıraksak olur. O halde

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s},\ s > 0,$$

bulunur.

Örnek 2. $\mathcal{L}\{x\} = \frac{1}{s^2}$, $s > 0$, $\mathcal{L}\{e^{ax}\} = \frac{1}{s-a}$, $s > a$, $\mathcal{L}\{\sin wx\} = \frac{w}{s^2+w^2}$, $s > 0$, ve $\mathcal{L}\{\cos wx\} = \frac{s}{s^2+w^2}$, $s > 0$, olduğunu gösteriniz.

Tanım 2. Her $x \geq x_0$ için

$$e^{-\alpha x} |f(x)| \leq M$$

olacak şekilde x_0, α ve $M > 0$ sabitleri varsa, bu durumda f fonksiyonuna α üstel basamaktandır denir.

Teorem 1. f fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında parçalı sürekli ve bir α reel sayısı için α üstel basamaktan ise, bu durumda $\mathcal{L}\{f\}$ Laplace dönüşümü $s > \alpha$ için mevcuttur.

Uyarı 1. Yukarıdaki teorem yeter koşulları ifade etmektedir, gerek koşul içermemektedir. Örneğin,

$$f(x) = xe^{x^2}\cos(e^{x^2})$$

fonksiyonu $s > 0$ için bir Laplace dönüşümüne sahiptir. Ancak α üstel basamaktan değildir.

Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Tanım 3. Aşağıdaki özellikleri sağlayan f fonksiyonuna E_α sınıfındandır denir:

(i) $0 \leq x < \infty$ aralığında tanımlıdır,

(ii) Her kapalı $0 \leq x \leq b,\ b > 0$, aralığında parçalı süreklidir.

(iii) α üstel basamaktandır.

Teorem 2. (Lineerlik Özelliği) $s > s_i,\ 1 \leq i \leq n$, için $\mathcal{L}\{f_i\}$ mevcut olsun. Bu durumda

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1 + c_2 f_2 + ... + c_n f_n\} = c_1\mathcal{L}\{f_1\} + c_2\mathcal{L}\{f_2\} + ... + c_n\mathcal{L}\{f_n\},\ s > s_0,$$

dır, burada $s_0 = \max\{s_1, s_2, ..., s_n\}$ ve $c_1, c_2, ..., c_n$ sabitlerdir.

Örnek 3. $b \neq 0$ olmak üzere $\mathcal{L}\{chbx\}$ Laplace dönüşümünü hesaplayınız.

Çözüm.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{chbx\} &= \mathcal{L}\{\frac{e^{bx} + e^{-bx}}{2}\} \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{bx}\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-bx}\} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{s-b} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+b} \\
&= \frac{s}{s^2 - b^2},\ s > |b|\,.
\end{aligned}$$

Teorem 3. (Öteleme Teoremi) $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s),\ s > s_0$, olsun. Bu durumda

$$\mathcal{L}\{e^{ax} f(x)\} = F(s-a),\ s > s_0 + a,$$

dır.

Örnek 4. $\mathcal{L}\{xe^{ax}\}$ Laplace dönüşümünü hesaplayınız.

Çözüm. $\mathcal{L}\{x\} = \dfrac{1}{s^2},\ s > 0,$ olduğundan $\mathcal{L}\{xe^{ax}\} = \dfrac{1}{(s-a)^2},\ s > a,$ bulunur.

Teorem 4. $f \in E_\alpha$ ve $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$ olsun. Bu durumda

$$\mathcal{L}\{x^n f(x)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s),\ n \in \mathbb{Z}^+.$$

Örnek 5. $\mathcal{L}\{x^{\frac{7}{2}}\} =?$

Çözüm. $f(x) = \sqrt{x}$ ve $F(s) = \mathcal{L}\{\sqrt{x}\} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} s^{-\frac{3}{2}}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x^{\frac{7}{2}}\} &= \mathcal{L}\{x^3\sqrt{x}\} \\ &= (-1)^3 \frac{d^3}{ds^3} F(s) \\ &= \frac{105}{16}\sqrt{\pi} s^{-\frac{9}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 5. $f \in E_\alpha$, $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$ ve $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} \in \mathbb{R}$ ise, bu durumda

$$\mathcal{L}\{\frac{1}{x} f(x)\} = \int\limits_s^\infty F(t)dt.$$

Örnek 6. $\mathcal{L}\{\dfrac{\sin 3x}{x}\} =?$

Çözüm. $f(x) = \sin 3x$ ve $F(s) = \dfrac{3}{s^2+9}$ olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\frac{\sin 3x}{x}\} &= \int\limits_s^\infty \frac{3}{t^2+9} dt \\ &= \frac{\pi}{2} + \arctan\frac{s}{3} \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 6. $f \in E_\alpha$ ve $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$ ise, bu durumda

$$\mathcal{L}\left\{\int\limits_0^x f(t)dt\right\} = \frac{1}{s}F(s).$$

Örnek 7. $\mathcal{L}\left\{\int\limits_0^x \sinh 2t dt\right\} = ?$

Çözüm. Teorem 2 den $\mathcal{L}\{\sinh 2x\} = \dfrac{2}{s^2-4}$ hesaplanabilir. O halde Teorem 6 dan

$$\mathcal{L}\left\{\int\limits_0^x \sinh 2t dt\right\} = \frac{2}{s(s^2-4)}$$

dir.