1.4.Fonksiyon Serilerinin Düzgün Yakınsaklığı

Tanım 1.4.1: $D \subseteq \mathbb{R}$, $f_k : D \to \mathbb{R}$ ve $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ serisi verilsin.

$s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$ ile tanımlı (s_n) dizisi, D üzerinde serinin kısmi toplamlar dizisi olarak adlandırılır.

Eğer (s_n), D üzerinde düzgün yakınsak ise verilen seri D üzerinde düzgün yakınsaktır.

Teorem 1.4.2 (Düzgün Yakınsaklık Prensibi): $D \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ serisi D üzerinde tanımlı fonksiyonların bir serisi olsun. Bu serinin D üzerinde düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon)$, $\forall x \in D$ için $|\sum\limits_{k=m+1}^{n} f_k(x)| < \varepsilon$ olmasıdır.

Sonuç 1.4.3: D üzerinde $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ serisi düzgün yakınsak ise bu serinin genel terimi 0'a düzgün yakınsaktır.

Örnek 10: $(-2,2)$ aralığında $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$ serisi düzgün yakınsak mıdır?

$f_n(x) = \frac{x^n}{2^n}$ genel terimi 0'a düzgün yakınsak mıdır?

Çözüm:
$$
\begin{aligned}
c_n := \sup_{-2<x<2} |f_n(x)| &= \sup_{-2<x<2} |\tfrac{x^n}{2^n}| \\
&= \tfrac{2^n}{2^n} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1 \neq 0 \implies (-2,2)$ aralığında (f_n) 0'a düzgün yakınsak değildir. Genel terimi 0 a düzgün yakınsak olmadığından verilen seri düzgün yakınsak değildir.

Sonuç 1.4.4: Teorem 1.4.2'de $n \to \infty$ için limit alırsak $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ serisi D üzerinde düzgün yakınsak $\iff \forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \ni \forall m > n_0$, $\forall x \in D$ için $|K_m(x)| = |\sum\limits_{k=m+1}^{\infty} f_k(x)| < \varepsilon$ olmasıdır.

Yani (K_m) kalan terimi 0'a düzgün yakınsaktır.

Teorem 1.4.5: $D \subseteq \mathbb{R}$, $f_k : D \to \mathbb{R}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ serisi verilsin. Her $x \in D$ için $|f_k(x)| \leq \alpha_k$ $(\forall k \in \mathbb{N})$ olsun ve $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ pozitif terimli serisi yakınsak olsun. O halde $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ fonksiyon serisi D üzerinde düzgün yakınsaktır. (Weierstrass - M kriteri)

Örnek 11: $\mathbb{R}$ de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}$ serisi düzgün yakınsak mıdır?

Çözüm: $\forall x \in \mathbb{R}$ için $|\cos nx| \leq 1$ sağlanır. O halde

$$|\frac{\cos nx}{2^n}| \leq \frac{1}{2^n}.$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ pozitif terimli serisi yakınsak olduğundan Weierstrass kriterinden verilen seri $\mathbb{R}$ de düzgün yakınsaktır.

Teorem 1.4.6: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ serisi bir $D \subseteq \mathbb{R}$ üzerinde sürekli fonksiyonların bir serisi olsun ve bir f fonksiyonuna düzgün yakınsak olsun. O halde, f, D üzerinde sürekli olmalıdır.

Teorem 1.4.7: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ serisi bir $[a, b]$ aralığında reel değerli, integrallenebilen fonksiyonların bir serisi olsun. Eğer $[a, b]$ üzerinde $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ serisi düzgün yakınsak ise

$$\int\limits_a^b (\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x))dx = \sum_{k=1}^{\infty} (\int\limits_a^b f_k(x)dx)$$

gerçeklenir.

Teorem 1.4.8: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ serisi $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli türevlere sahip fonksiyonların bir serisi olsun. Eğer bu seri bir f fonksiyonuna noktasal yakınsak ve $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k'$ serisi bir g fonksiyonuna düzgün yakınsak ise

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_k(x)$$

gerçeklenir.

Teorem 1.4.9: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ serisi bir $[a, b]$ aralığında bir f fonksiyonuna düzgün yakınsak olsun ve $c \in [a, b]$ olmak üzere $\lim\limits_{x \to c} f_k(x) = \alpha_k$ ($\forall k \in \mathbb{N}$ için) mevcut olsun. O halde;

$$\lim_{x \to c} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \to c} f_k(x)$$

gerçeklenir.

Teorem 1.4.10 (Abel Kriteri): $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ serisi bir $D \subseteq \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı fonksiyonların bir serisi ve (g_n) de negatif olmayan fonksiyonların bir dizi olsun. Eğer;

1) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ serisi D üzerinde düzgün yakınsak
2) (g_n) dizisi D üzerinde monoton azalan ve düzgün sınırlı ise

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ serisi de D üzerinde düzgün yakınsaktır.

Örnek 12: $(0,1)$ aralığında $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ serisi düzgün yakınsak mıdır?

Çözüm: $\forall x \in (0,1)$ için,

$|\frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n| \leq \frac{1}{n}$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisi ıraksak olduğundan burada W-kriterini kullanamayız.

Abel kriterini uygulayalım.

$f_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ve $g_n = x^n$; $\forall x \in (0,1)$ için g_n negatif terimli değil.

$M = 1$ seçersek, $(0,1)$ üzerinde (g_n) düzgün sınırlıdır ve monoton azalandır.

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ alterne serisi düzgün yakınsaktır.

O halde Abel kriterinden; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ serisi $(0,1)$ aralığında düzgün yakınsaktır.

Teorem 1.4.11 (Dirichlet Kriteri): $D \subseteq \mathbb{R}$ üzerinde (g_n) negatif olmayan bir fonksiyon dizisi ve eğer D üzerinde,

1) $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ serisinin kısmi toplamlar dizisi düzgün sınırlı
2) (g_n) monoton azalan ve $g_n \to 0$ (düzgün)

ise $\sum_{k=1}^{\infty} f_k g_k$ serisi D de düzgün yakınsaktır.

Örnek 13: (c_n) reel terimli bir dizi olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ serisi yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ serisinin $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\forall x \in [0,1]$ için $|c_n x^n| \leq |c_n|$

Abel kriterini uygulayalım. $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ serisi yakınsak olduğundan ve de x'den bağımsız olduğundan düzgün yakınsaktır.

$g_n(x) = x^n$ alırsak, $[0,1]$ aralığında düzgün sınırlıdır.

$0 < x < 1$ için $(g_n(x)) = (x^n)$ monoton azalandır.

O halde, Abel kriterinden $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ serisi $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsaktır.