2.BÖLÜM: KUVVET SERİLERİ

Bu bölümde kuvvet serilerini tanımlayıp, bu serilerin yakınsaklık aralığını inceleyeceğiz.

2.1.Giriş

Tanım 2.1.1: $c_n \in \mathbb{R}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ ve $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-2)^2 + \dots + c_n(x-a)^n + \dots$$

serisine kuvvet serisi denir. (c_n: serinin katsayıları)

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!} = 1 + \frac{x-1}{1!} + \frac{(x-1)^2}{2!} + \dots + \frac{(x-1)^n}{n!} + \dots$

Bu seriler "hangi x değerleri için yakınsak hangi x ler için ıraksaktır?" sorusuna cevap arayacağız.

Örnek 1: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm: Eğer $u_n = \frac{x^n}{n!}$ dersek;

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} . \frac{n!}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}|x| = 0 < 1$$

olduğundan seri her $x \in \mathbb{R}$ için mutlak yakınsaktır. Dolayısıyla mutlak yakınsak her seri yakınsak olduğundan seri yakınsaktır.

Örnek 2: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm: Eğer $u_n = \frac{x^n}{n}$ dersek;

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{n+1} . \frac{n}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}|x| = |x|$$

Eğer; $|x| < 1 \Longrightarrow$ seri mutlak yakınsak
$|x| > 1 \Longrightarrow$ seri ıraksak
$|x| = 1 \Longrightarrow$ şüpheli durum.

$|x| = 1 \Longrightarrow x = \mp 1$ olur. $\Rightarrow x = 1$ için $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ıraksak

$\Rightarrow x = -1$ için $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ alterne serisi yakınsak

Demek ki $-1 \leq x < 1$ için seri yakınsaktır.

Teorem 2.1.2 (Cauchy-Hadamard Teoremi): $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ kuvvet serisi verilsin ve $\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|} = L$ olsun.

Şimdi $R = \frac{1}{L}$ diyelim. ($L = 0 \Rightarrow R = \infty$, $L = \infty \Rightarrow R = 0$ alınacaktır.)

O halde; a) $|x-a| < R$ için seri yakınsak

b) $|x-a| > R$ için seri ıraksak

c) $|x-a| = R$ için şüpheli durum.

Not: Serinin yakınsak olduğu en geniş aralığa "yakınsaklık aralığı" denir. Yukarıdaki R genişletilmiş reel sayısına "yakınsaklık yarıçapı" denir.

Örnek 3: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+1)^k}{2^k}$ serisinin yakınsaklık aralığını ve yakınsaklık yarıçapını bulunuz.

Çözüm: $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{2^k}} = \frac{1}{2} = L$ olduğundan $R = \frac{1}{L} = 2$; yakınsaklık yarıçapı

O halde; $|x+1| = |x-(-1)| < 2$ için seri yakınsak

$|x+1| > 2$ için seri ıraksak

$|x+1| = 2$ için şüpheli durum

$\iff x+1 = \mp 2$

$\iff x = 1 \vee x = -3.$

$x = 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{2^k} = \infty$ olup seri ıraksaktır.

$x = -3 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^k}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ seri ıraksaktır.

O halde $|x+1| < 2$ olabilecek x'ler için seri yakınsaktır.

$-2 < x+1 < 2 \Rightarrow -3 < x < 1 \Rightarrow$ Yakınsaklık aralığı $(-3, 1)$.

Örnek 4: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n}$ serisinin yakınsaklık aralığını ve yakınsaklık yarıçapını bulunuz.

Çözüm:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n} = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2^2} + \frac{x^6}{2^3} + \ldots$$
$$= 0.x + \frac{x^2}{2} + 0.x^3 + \frac{x^4}{2^2} + \ldots$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{2n+2}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{x^{2n}}\right|$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} x^2$$
$$= \frac{x^2}{2}.$$

Eğer; $\frac{x^2}{2} < 1 \Rightarrow$ seri yakınsak,

$\frac{x^2}{2} > 1 \Rightarrow$ seri ıraksak,

$\frac{x^2}{2} = 1 \Rightarrow$ şüpheli durum.

$\frac{x^2}{2} < 1 \Leftrightarrow x^2 < 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ için seri yakınsak

$x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \mp\sqrt{2}$ bulunur. $x = \sqrt{2} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n} = \infty \Rightarrow$ seri ıraksak

$$x = -\sqrt{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n} = \infty \Rightarrow \text{seri ıraksak}$$

O halde $|x| < \sqrt{2}$ için seri yakınsaktır. Yakınsaklık aralığı: $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, yakınsaklık yarıçapı: $R = \sqrt{2}$.