3.BÖLÜM: TAYLOR SERİLERİ

Teorem 3.1.1: f, $x=0$ noktasında n-inci mertebeden türevli bir fonksiyon olsun. O halde

$p(0)=f(0)$, $p'(0)=f'(0)$, $\ldots$, $p^{(n)}(0)=f^{(n)}(0)$

olacak biçimde derecesi n'den büyük olmayan bir p polinomu vardır ve bu polinom

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{k=0}^{n} \tfrac{f^{(k)}(0)}{k!}.x^k \\ &= f(0)+\tfrac{f'(0)}{1!}x+\tfrac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\tfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \end{aligned}$$

ile verilir.

Aynı şekilde gösterilebilir ki f, $x=a$ noktasında n-inci mertebeden türevli ise

$p(a)=f(a)$, $p'(a)=f'(a)$, $\ldots$, $p^{(n)}(a)=f^{(n)}(a)$

olacak biçimde n-inci dereceden bir p polinomu vardır ve bu polinom,

$$p(x)=\sum \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

ile verilir.

Bu polinoma f tarafından $x=a$ noktasında üretilen Taylor Polinomu denir. $p(x)=T_n(f(x))=T_n(f(x,a))$ ile gösterilir.

Örnek 1: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$ ile tanımlanan fonksiyon tarafından $x=0$ noktasında üretilen polinomu yazınız.

Çözüm: $f(0)=1$

$f'(x)=e^x$, $f''(x)=e^x$, $\ldots$, $f^{(n)}(x)=e^x$

$f'(0)=1$, $f''(0)=1$, $\ldots$, $f^{(n)}(0)=1$.

$$\begin{aligned} p(x) &= 1+\tfrac{1}{1!}x+\tfrac{1}{2!}x^2+\cdots+\tfrac{1}{n!}x^n \\ &= 1+\tfrac{x}{1!}+\tfrac{x^2}{2!}+\cdots+\tfrac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\tfrac{x^k}{k!} \end{aligned}$$

f tarafından $x=0$ noktasında üretilen bir polinomdur.

Teorem 3.1.2: $n\geq 1$ olmak üzere P_n polinomu $n-$inci dereceden bir polinom ve f ile g, $x=0$ da $n-$inci mertebeden türevli fonksiyonlar olsunlar. Ayrıca $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$ olmak üzere eğer $f(x)=P_n(x)+\, x^n g(x)$ şeklinde yazılabiliyorsa P_n, $x=0$ da f tarafından üretilen Taylor polinomudur.

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k+K_n(x)$$

ifadesine Kalan Terimli Taylor Formülü denir. Şimdi kalan terimin nasıl hesaplanacağını verelim.

Teorem 3.1.3: f fonksiyonu $x = a$ noktasını içeren bir aralıkta $n + 1-$inci mertebeden sürekli türeve sahip olsun. O halde Taylor Formülündeki kalan terim,

$$K_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{n+1}(t)dt$$

ile verilir.

Tanım 3.1.4: f fonksiyonu $x = a$ noktasını içeren bir aralıkta her mertebeden türevlenebilir olsun.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k$$

serisine a noktasında f fonksiyonu tarafından üretilen Taylor serisi denir. Bu serinin toplamının $f(x)$ olması için gerek ve yeter şart $(K_n(x))$ kalan teriminin sıfıra yakınsamasıdır.

Örnek 2: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 3x^3 + 4x^2 - x + 2$ fonksiyonunu $(x + 1)$ in kuvetlerine göre yazınız.

Çözüm: Demek ki f fonksiyonunun $x = -1$ noktasındaki Taylor açılımını yapmamız gerekir.
$f(-1) = f^{(0)}(-1) = (-1)^4 - 3(-1)^3 + 4(-1)^2 - (-1) + 2 = 11$
$f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 8x - 1 \Rightarrow f'(-1) = -22$
$f''(x) = 12x^2 - 18x + 8 \Rightarrow f''(-1) = 38$
$f'''(x) = 24x - 18 \Rightarrow f'''(x) = -42$
$f^{(4)}(x) = 24 \Rightarrow f^{(4)}(-1) = 24$
$n \geq 5$ için $f^{(n)}(x) = 0$ olup $K_n(x) \to 0, \quad (n \to \infty)$, olur.
O halde $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x-a)^k$ olup,

$$f(x) = 11 - \frac{22}{1!}(x+1) + \frac{38}{2!}(x+1)^2 - \frac{42}{3!}(x+1)^3 + \frac{24}{4!}(x+1)^4 + 0 + 0 + ...$$

$$f(x) = 11 - 22(x+1) + 19(x+1)^2 - 7(x+1)^3 + (x+1)^4$$

Taylor açılımında eğer $a = 0$ alınırsa bu açılıma Maclaurin açılımı denir.

Örnek 3: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ ile tanımlanan fonksiyonun Maclaurin açılımını bulunuz.

Çözüm: $f(0) = 1$
$f'(x) = f''(x) = ... = f^{(k)}(x) = e^x$
$\Rightarrow f^{(k)}(0) = 1, ...(k = 0, 1, 2, ...)$

$\Rightarrow e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + K_n(x)$

$f^{(n+1)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(n+1)}(c) = e^c$

$K_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}$

Acaba hangi x ler için $K_n(x) \to 0 \quad (n \to \infty)$ sağlanır?

Önce $x = 0 \Rightarrow K_n(0) = 0$ olup $K_n(0) \to 0$ sağlanır.

Sonra $x > 0 \Rightarrow 0 < c < x \Rightarrow 1 = e^0 < e^c < e^x$

$0 \leq K_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1} < \frac{e^x}{(n+1)!} x^{n+1} \to 0, (n \to \infty)$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} K_n(x) = 0.$

Daha sonra $x < 0$ olsun.$\Rightarrow x < c < 0$

$\Rightarrow e^x < e^c < e^0 = 1$ olup böylece

$$|K_n(x)| = \left| \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq 1 \frac{\left|x^{n+1}\right|}{(n+1)!} \to 0, (n \to \infty)$$

elde edilir. O halde $\forall x \in \mathbb{R}$ için $\lim_{n \to \infty} K_n(x) = 0$ olduğundan $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$ sağlanır.

Ödev: e sayısının irasyonel olduğunu gösteriniz.

Tanım 3.1.5 (Analitik Fonksiyon): $R > 0$ olmak üzere $(a - R, a + R)$ aralığında f fonksiyonu bir kuvvet serisinin toplamına eşit oluyorsa, f bu aralıkta analitiktir denir.

Örnek 4: $|x| < 1$ için $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ olduğunu biliyoruz.

O halde $f(x) = \frac{1}{1-x}$ ile verilen fonksiyon $(-1, 1)$ aralığında analitiktir.