Gamma Fonksiyonu: $\Gamma(n) = \int\limits_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$ integrali, $n > 0$ için yakınsaktır, $n \leq 0$ için ise ıraksaktır.

Örnek 10: $n \in \mathbb{N}$ için $\Gamma(n) = (n-1)!$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
\Gamma(n) &= \int\limits_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx \\
&= \lim_{t\to\infty} \int\limits_0^t x^{n-1}e^{-x}dx \\
&= \lim_{t\to\infty} \left\{ \left(x^{n-1}e^{-x}\right)\Big|_0^t + \int\limits_0^t (n-1)\,x^{n-2}e^{-x}dx \right\} \\
&= \lim_{t\to\infty} \left\{ -\frac{t^{n-1}}{e^t} + 0 \right\} + \lim_{t\to\infty} (n-1) \int\limits_0^t e^{-x}x^{n-2}dx \\
&= (n-1) \lim_{t\to\infty} \int\limits_0^t x^{n-2}e^{-x}dx \\
&= (n-1) \underbrace{\int\limits_0^\infty x^{n-2}e^{-x}dx}_{\Gamma(n-1)}
\end{aligned}$$

Yukarıdaki yöntemi $\Gamma(n-1)$'e uygularsak,

$$\begin{aligned}
\Gamma(n) &= (n-1)(n-2)\,\Gamma(n-2) \\
&= (n-1)(n-2)\ldots 1\,\underbrace{\Gamma(1)}_{1} \\
\Gamma(n) &= (n-1)! \\
\Gamma(n+1) &= n!
\end{aligned}$$

NOT: $\forall t > 0$ için $\Gamma(t) = \frac{1}{t}\Gamma(t+1)$ olduğu biliniyor.

Bundan yararlanarak Γ fonksiyonunun tanım kümesi daha da genişletebiliriz. Eğer $-1 < t < 0 \Longrightarrow 0 < t+1 < 1$ olduğundan $\Gamma(n+1)$ integrali mevcuttur. Yukarıdaki nottan $\Gamma(t)$ mevcuttur. Demek ki $-1 < t < 0$ için $\Gamma(t)$ mevcuttur.

Benzer şekilde $-2 < t < -1 \Longrightarrow \Gamma(n+1)$ anlamlıdır (mevcut). Benzer yöntem ile $-n < t < -n+1 \Longrightarrow \Gamma(t)$ anlamlıdır.

Böylece Γ fonksiyonunun tanım kümesini $\mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, ...\}$ olarak alabiliriz.

Örnek 11: $\int\limits_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ olduğu biliniyor. Buna göre $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = ?$

Çözüm:
$$
\begin{aligned}
\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \int\limits_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx &= \int\limits_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx \qquad (x = t^2 \Longrightarrow dx = 2tdt) \\
&= \int\limits_0^\infty \left(t^2\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-t^2} 2tdt \\
&= 2\int\limits_0^\infty t^{-1} t e^{-t^2} dt \\
&= 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} \\
&= \sqrt{\pi}
\end{aligned}
$$

Ödev: Yukarıdaki integralden yararlanarak $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$'yi hesaplayınız.

Beta Fonksiyonu: $\beta(m,n) = \int\limits_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx$ integrali $m > 0$ ve $n > 0$ için yakınsaktır. Diğer durumlarda ıraksaktır.

Ayrıca,

$$
\begin{aligned}
1)\ \beta(m,n) &= \beta(n,m) \\
2)\ \beta(m,n) &= 2\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta d\theta
\end{aligned}
$$

sağlanır, gösteriniz.

NOT: $\beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ bağıntısı gerçeklenir.

Örnek 12: $\int\limits_0^1 x^4 (1-x)^3 dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $\beta(m,n) = \int\limits_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$

$m-1=4 \Longrightarrow m=5$
$n-1=3 \Longrightarrow n=4$

O halde, $\beta(5,4) = \dfrac{\Gamma(5)\,\Gamma(4)}{\Gamma(5+4)} = \dfrac{4!3!}{8!} = \dfrac{1}{280}$

Ödev: $\int\limits_0^2 \dfrac{x^2}{\sqrt{2-x}}dx$ integralini hesaplayınız.