5. BÖLÜM: VEKTÖR DEĞERLİ FONKSİYONLAR

5.1 Vektör Değerli Fonksiyon

$D \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $\begin{array}{ll} f: & D \to \mathbb{R} \\ & t \to f(t) \end{array}$ ile tanımlı f reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonları inceledik.

Yine V bir vektör uzay olmak üzere,

$D \subseteq \mathbb{R}$, $\begin{array}{ll} F: & D \to V \\ & t \to \overrightarrow{f}(t) \end{array}$ ile tanımlı fonksiyona reel değişkenli ve vektör değerli fonksiyon denir.

Vektör değerli fonksiyonları büyük harfle göstereceğiz ve çoğu kez V yerine $\mathbb{R}^3$ alacağız.

Örnek 1: $F(t) = \ln t \overrightarrow{i} + e^t \overrightarrow{j} + \sqrt{1-t^2}\overrightarrow{k}$ ile tanımlı fonksiyon için D_f'i bulunuz.

Çözüm: $f_1(t) = \ln t \Longrightarrow D_{f_1} = \{t \in \mathbb{R} : t > 0\} = (0, \infty)$

$f_2(t) = e^t \Longrightarrow D_{f_2} = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

$$\begin{aligned} f_3(t) = \sqrt{1-t^2} \Longrightarrow D_{f_3} &= \left\{t \in \mathbb{R} : 1-t^2 \geq 0\right\} \\ &= \{t \in \mathbb{R} : -1 \leq t \leq 1\} \\ &= [-1, 1] \\ D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2} \cap D_{f_3} &= (0, \infty) \cap (-\infty, \infty) \cap [-1, 1] \\ &= (0, 1] \end{aligned}$$

Tanım 5.1.1: F ile G vektör değerli ve h ile u reel değerli fonksiyonlar olmak üzere,

1) $(F \mp G)(t) = F(t) \mp G(t)$
2) $(F.G)(t) = F(t).G(t)$
3) $(F\mathrm{x}G)(t) = F(t)\mathrm{x}G(t)$
4) $(hF)(t) = h(t)F(t)$
5) $(Fou)(t) = F(u(t))$

ile tanımlanır.

Örnek 2: $\overrightarrow{F}(t) = \sin t \overrightarrow{i} - \cos t \overrightarrow{j} + t\overrightarrow{k}$
$\overrightarrow{G}(t) = \cos t \overrightarrow{i} - \sin t \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$
$h(t) = \sqrt{t}$
$u(t) = t^2$

fonnksiyonları verilsin. Yukarıdaki tanımda geçen özellikleri sağladığını gösteriniz.

Çözüm: 1) $$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{F} \mp \overrightarrow{G}\right)(t) &= \overrightarrow{F}(t) \mp \overrightarrow{G}(t) \\ &= (\sin t \mp \cos t)\overrightarrow{i} + (-\cos t \mp \sin t)\overrightarrow{j} + (t \mp 1)\overrightarrow{k} \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{F}.\overrightarrow{G}\right)(t) &= \overrightarrow{F}(t).\overrightarrow{G}(t)\\ &= \sin t\cos t + (-\sin t)(-\cos t) + t\\ &= 2\sin t\cos t + t\end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{F}\text{x}\overrightarrow{G}\right)(t) = \overrightarrow{F}(t)\text{x}\overrightarrow{G}(t) &= \begin{vmatrix} i & j & k\\ \sin t & -\cos t & t\\ \cos t & -\sin t & 1\end{vmatrix}\\ &= (-\cos t + t\sin t)\overrightarrow{i} - (\sin t - t\cos t)\overrightarrow{j} + \left(-\sin^2 t + \cos^2 t\right)\overrightarrow{k}\end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned}(hF)(t) &= h(t)F(t)\\ &= \sqrt{t}\left(\sin t\overrightarrow{i} - \cos t\overrightarrow{j} + t\overrightarrow{k}\right)\\ &= \sqrt{t}\sin t\overrightarrow{i} - \sqrt{t}\cos t\overrightarrow{j} + t\sqrt{t}\overrightarrow{k}\end{aligned}$$

5) $$\begin{aligned}(Fou)(t) &= F(u(t))\\ &= F\left(t^2\right)\\ &= \sin\left(t^2\right)\overrightarrow{i} - \cos\left(t^2\right)\overrightarrow{j} + t^2\overrightarrow{k}\end{aligned}$$

Tanım 5.1.2: $F(t) = f_1(t)\overrightarrow{i} + f_2(t)\overrightarrow{j} + f_3(t)\overrightarrow{k}$ olmak üzere, $F(t)$'nin normu,

$$\begin{aligned}\sqrt{F(t)F(t)} &= \sqrt{(f_1(t))^2 + (f_2(t))^2 + (f_3(t))^2}\\ &= \|F(t)\|\end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır.

Örnek 3: $F(t) = \sin t\overrightarrow{i} - \cos t\overrightarrow{j} + t\overrightarrow{k}$ vektör değerli fonksiyonu verilmiş olsun.

$$\begin{aligned}\|F(t)\| &= \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + t^2}\\ &= \sqrt{1+t^2}\end{aligned}$$

Tanım 5.1.3: $\overrightarrow{F}$ ile $\overrightarrow{G}$ vektör değerli fonksiyonları D üzerinde ortogonaldir (diktir) $\Longleftrightarrow$ $\forall t \in D$ için $F(t).G(t) = 0$ sağlanır.

$\overrightarrow{F}$ fonksiyonu $\overrightarrow{G}$ fonksiyonuna dikse $F \perp G$ ile gösterilir.

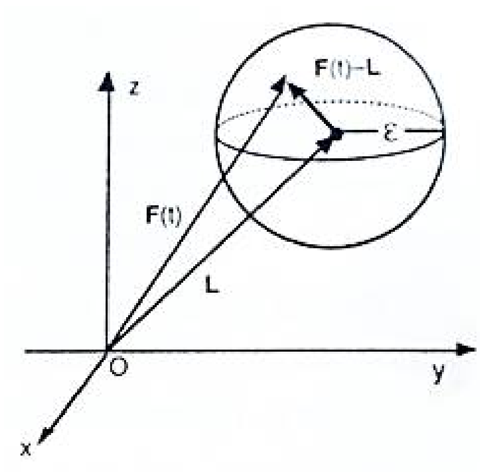
Örnek 4: $$\begin{aligned}F(t) &= \left(t-t^2\right)\overrightarrow{i} + (1+3t)\overrightarrow{j} - 2t\overrightarrow{k}\\ G(t) &= (1-2t)\overrightarrow{i} + t\overrightarrow{j} + \left(1+t^2\right)\overrightarrow{k}\end{aligned}$$
vektör değerli fonksiyonları $\mathbb{R}$ üzerinde ortogonal midir?

Çözüm: $$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, F(t).G(t) &= \left(t-k^2\right)(1-2t) + (1+3t)t + (-2t)\left(1+t^2\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

O halde $F \perp G$ $(\mathbb{R}\ \ddot{u}zerinde)$.

5.2 Vektör Değerli Fonksiyonların Limit ve Sürekliliği

Tanım 5.2.1: $D \subseteq \mathbb{R}$ ve $F : D \to \mathbb{R}^3$ vektör değerli fonksiyon olmak üzere $t_0 \in D^{'}$ olsun, burada $D^{'}$, D'nin yığılma noktaları kümesidir. F fonksiyonunun t_0 noktasında bir L vektör limitine sahip olması için $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon, t_0)$ $\ni 0 < |t - t_0| < \delta$ eşitsizliğini gerçekleyen her $t \in D$ için $\left\| \overrightarrow{F}(t) - \overrightarrow{L} \right\| < \varepsilon$ olmasıdır. Bu durumda $\lim\limits_{t \to t_0} \overrightarrow{F}(t) = \overrightarrow{L}$ sağlanır.



Tanım 5.2.2: $D \subseteq \mathbb{R}$ ve $F : D \to \mathbb{R}^3$ vektör değerli fonksiyon olmak üzere $\overrightarrow{F}(t) = f_1(t)\overrightarrow{i} + f_2(t)\overrightarrow{j} + f_3(t)\overrightarrow{k}$ verilsin ve $t_0 \in D^{'}$ olsun.

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to t_0} \overrightarrow{F}(t) &= \underbrace{\left(\lim_{t \to t_0} f_1(t)\right)}_{a}\overrightarrow{i} + \underbrace{\left(\lim_{t \to t_0} f_2(t)\right)}_{b}\overrightarrow{j} + \underbrace{\left(\lim_{t \to t_0} f_3(t)\right)}_{c}\overrightarrow{k} \\
&= \overrightarrow{L} \\
&= a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k}
\end{aligned}$$

sağlanır.

Örnek 5: $\overrightarrow{F}(t) = e^t\overrightarrow{i} + \dfrac{\sin t}{t}\overrightarrow{j} + \dfrac{t+3}{-t+2}\overrightarrow{k}$ vektör değerli bir fonksiyon olmak üzere $\overrightarrow{L} = \lim\limits_{t \to \infty} \overrightarrow{F}(t) = ?$

Çözüm:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\overrightarrow{F}(t) &= \left(\lim_{t\to 0}e^t\right)\overrightarrow{i}+\left(\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\right)\overrightarrow{j}+\left(\lim_{t\to 0}\frac{t+3}{-t+2}\right)\overrightarrow{k}\\
&= 1\overrightarrow{i}+1\overrightarrow{j}+\tfrac{3}{2}\overrightarrow{k}\\
&= \overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\tfrac{3}{2}\overrightarrow{k}
\end{aligned}$$

Teorem 5.2.3: F ile G vektör değerli fonksiyon ve $\lim\limits_{t\to t_0}\overrightarrow{F}(t)=\overrightarrow{L_1}$, $\lim\limits_{t\to t_0}\overrightarrow{G}(t)=\overrightarrow{L_2}$ olsun. O halde,

a) $\lim\limits_{t\to t_0}\left(\overrightarrow{F}(t)\mp\overrightarrow{G}(t)\right)=\overrightarrow{L_1}\mp\overrightarrow{L_2}$

b) $\lim\limits_{t\to t_0}\left(\overrightarrow{F}(t).\overrightarrow{G}(t)\right)=\overrightarrow{L_1}.\overrightarrow{L_2}$

c) $\lim\limits_{t\to t_0}\left(\overrightarrow{F}(t)\,\mathrm{x}\,\overrightarrow{G}(t)\right)=\overrightarrow{L_1}\mathrm{x}\overrightarrow{L_2}$

sağlanır.

Örnek 6: $\overrightarrow{F}(t)=\cos t\,\overrightarrow{i}+\sin t\,\overrightarrow{j}+t\,\overrightarrow{k}$
$\overrightarrow{G}(t)=\sin t\,\overrightarrow{i}+\cos t\,\overrightarrow{j}+(t-1)\,\overrightarrow{k}$
vektör değerli fonksiyonları kullanarak yukarıdaki tanım özelliklerini gösteriniz.

Çözüm: a) $\lim\limits_{t\to 0}\left(\overrightarrow{F}(t)\mp\overrightarrow{G}(t)\right)=\overrightarrow{L_1}\mp\overrightarrow{L_2}=\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}$

b) $\lim\limits_{t\to t_0}\left(\overrightarrow{F}(t).\overrightarrow{G}(t)\right)=\overrightarrow{L_1}.\overrightarrow{L_2}=0$

c) $\lim\limits_{t\to t_0}\left(\overrightarrow{F}(t)\,\mathrm{x}\,\overrightarrow{G}(t)\right)=\overrightarrow{L_1}\mathrm{x}\overrightarrow{L_2}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$

Tanım 5.2.4: $D\subseteq\mathbb{R}$ ve $F:D\to\mathbb{R}^3$ vektör değerli fonksiyon olsun. F, $t_0\in D'$ noktasında sürekli $\Longleftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\delta(\varepsilon,t_0)>0 \ni |t-t_0|<\delta$ özellikli her $t\in D$ için $\|F(t)-F(t_0)\|<\varepsilon$ sağlanır.

Not: $t_0\in D\cap D'$ olsun. O halde F fonksiyonu t_0'da sürekli $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{t\to t_0}F(t)=F(t_0)$ sağlanır.

Örnek 7: $F:D\to\mathbb{R}^3$ olmak üzere $\overrightarrow{F}(t)=[|t|]\overrightarrow{i}+\dfrac{\sin t}{t}\overrightarrow{j}+e^t\overrightarrow{k}$ ile tanımlı vektör değerli fonksiyonu verilsin.

a) F, $t_0=0$ noktasında bir limite sahip midir?

b) F, $t_0=0$ noktasında sürekli midir?

Çözüm: $t_0=0\in\mathbb{R}\cap\mathbb{R}'$ ve $f_1(t)=[|t|]$; $\lim\limits_{t\to 0^+}[|t|]=0$ ve $\lim\limits_{t\to 0^-}[|t|]=-1$ olduğundan $\lim\limits_{t\to 0}f_1(x)$ limiti mevcut değildir. O halde $\lim\limits_{t\to 0}F(t)$ mevcut değildir.

Örnek 8: $F : D \to \mathbb{R}^3$ olmak üzere $\overrightarrow{F}(t) = \left(t^2+1\right)\overrightarrow{i} + \dfrac{\sin t}{t}\overrightarrow{j} + e^t\overrightarrow{k}$ ile tanımlı vektör değerli fonksiyonu verilsin.

a) $t_0 = 0$ noktasında limitini bulunuz.

b) $t_0 = 0$ noktasında F, sürekli midir?

Çözüm: **a)** $t_0 = 0 \in \mathbb{R} \cap \mathbb{R}'$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} F(t) &= \left(\lim_{t\to 0}\left(t^2+1\right)\right)\overrightarrow{i} + \left(\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\right)\overrightarrow{j} + \left(\lim_{t\to 0} e^t\right)\overrightarrow{k} \\ &= \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}\end{aligned}$$

b) $f_1(t) = t^2 + 1$ olmak üzere f_1, $t = 0$'da süreklidir.

$f_2(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ olmak üzere f_2, $t = 0$'da tanımsız olduğundan sürekli değildir.

O halde F fonksiyonu, $t = 0$'da sürekli değildir.

Not: Burada yine belirtelim ki F vektör değierli fonksiyonunun sürekli olması için yeter ve gerek şart her bir bileşen fonksiyonun sürekli olmasıdır.

Teorem 5.2.5: F ve G vektör değerli fonksiyonlar olmak üzere, F, G t_0 noktasında sürekli oluyorlarsa $F+G$, $F.G$, $F\mathrm{x}G$ fonksiyonları da t_0 noktasında süreklidir.