5.4 Vektör Değerli Fonksiyonların Türevi

Tanım 5.4.1: $D \subseteq \mathbb{R}$ ve $F : D \to \mathbb{R}^3$, $t_0 \in D \cap D^{'}$ olsun. Eğer,

$$\lim_{t \to t_o} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0}$$

limiti varsa F, t_0'da türevlidir denir ve $F^{'}(t_0)$ veya $\dfrac{df}{dt}(t_0)$ ile gösterilir.

Tanım 5.4.2: F'nin t_0 noktasında türevli$\Longleftrightarrow$ f_1, f_2, f_3 bileşen fonksiyonlarının t_0'da türevli olmasıdır. Bu durumda;

$$F^{'}(t) = f_1^{'}(t_0)\, i + f_2^{'}(t_0)\, j + f_3^{'}(t_0)\, k$$

gerçeklenir.

Örnek 13: $F(t) = |t|\, i + \cos t j + \sin t k$ ile verilen fonksiyon $t = 0$ noktasında türevli midir?

Çözüm: $f_1(t) = |t|$, $f_2(t) = \cos t$, $f_3(t) = \sin t$
$f_1(t) = |t|$ ile tanımlı fonksiyon $t = 0$'da türevli değildir. O halde F, $t = 0$'da türevli değildir.

Teorem 5.4.3: F ve G vektör değerli fonksiyonları t noktasında türevli ve h fonksiyonu da t noktasında türevli ise
1) $(F(t) \mp G(t))^{'} = F^{'}(t) \mp G^{'}(t)$
2) $(F(t) . G(t))^{'} = F^{'}(t) . G(t) + F(t) . G^{'}(t)$
3) $(F(t) \mathrm{x} G(t))^{'} = F^{'}(t) \mathrm{x} G(t) + F(t) \mathrm{x} G^{'}(t)$
4) $(h(t) F(t))^{'} = h^{'}(t) F(t) + h(t) F^{'}(t)$

Örnek 14: $F(t) = i - t^2 j + tk$ ve $G(t) = ti + (1+t)\, j + \left(t^2+1\right) k$ fonksiyonları verilsin.

$$F(t) . G(t) = t - t^2 (t+1) + t\left(t^2+1\right) = 2t - t^2$$

$$F(t) \mathrm{x} G(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -t^2 & t \\ t & 1+t & t^2+1 \end{vmatrix} = \left[\left(-t^4 - 2t^2 - t\right) i - j + \left(1 + t + t^3\right) k\right]$$

$$\begin{aligned} (F(t) \mathrm{x} G(t))^{'} &= \left(-4t^3 - 4t - 1\right) i + 0j + \left(1 + 3t^2\right) k \\ &= \left(-4t^3 - 4t - 1\right) i + \left(1 + 3t^2\right) k \end{aligned}$$

Teorem 5.4.4: F fonksiyonu (a, b) aralığının her noktasında türevli ve de; $\|F(t)\| = c$ $(sabit)$ olsun. O halde, $F \perp F^{'}$ gerçeklenir.

Vektör Değerli Fonksiyonların Türevinin Geometrik Yorumu

Eğer $t > t_0 \Longrightarrow \dfrac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0}$ vektörü, $\overrightarrow{P_0 P}$ vektörü ile aynı yönlüdür.
Eğer $t < t_0 \Longrightarrow \dfrac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0}$ vektörü, $\overrightarrow{P_0 P}$ vektörü ile ters yönlüdür.

Dolayısıyla $F^{'}(t_0)$ mevcut ise bu vektör, P_0'dan geçen ve $\overrightarrow{P_0 P}$ kiriş vektörü limiti olan bir vektördür ve eğri ile aynı yönlüdür. Eğer $\left\| F^{'}(t_0) \right\| \neq 0$ ise

$$\begin{aligned} T(t_o) &= \frac{F^{'}(t_0)}{\|F'(t_0)\|}, \ t_0 \text{ noktasındaki teğet vektör} \\ N(t) &= \frac{T^{'}(t)}{\|T'(t)\|}, \ t \text{ parametreli noktadaki normal vektördür.} \end{aligned}$$

Örnek 15: $\overrightarrow{r}(t) = \cos t \overrightarrow{i} + \cos t \overrightarrow{j} + \sqrt{2} \sin t \overrightarrow{k}$ eğrisine $t = \dfrac{\pi}{4}$ noktasından çizilen (birim) teğet ve normal vektörü bulunuz.

Çözüm: $r^{'}(t) = -\sin ti - \sin tj + \sqrt{2} \cos tk$

$\left\| r^{'}(t) \right\| = \sqrt{\sin^2 t + \sin^2 t + 2\cos^2 t} = \sqrt{2}$

$$T(t) = \frac{r^{'}(t)}{\|r'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\sin ti - \sin tj + \sqrt{2} \cos tk \right)$$

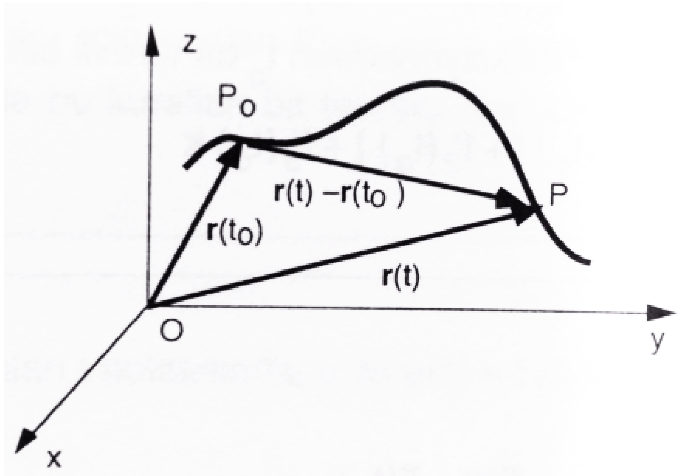
$$\begin{aligned} T\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\sin \frac{\pi}{4} i - \sin \frac{\pi}{4} j + \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} k \right) \\ &= -\frac{1}{2} i - \frac{1}{2} j + \frac{1}{\sqrt{2}} k \end{aligned}$$

Normal vektör için; $T^{'}(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \left(-\cos i - \cos j + \sqrt{2} \sin tk \right)$ olup

$$\left\| T^{'}(t) \right\| = \sqrt{\frac{1}{2} \left(2\cos^2 t + 2\sin^2 t \right)} = 1.$$

$$N(t) = \frac{T^{'}(t)}{\|T'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\cos ti - \cos tj + \sqrt{2} \sin tk \right)$$

$$N\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} i - \frac{1}{2} j - \frac{1}{2} k$$



Burada $r\left(t\right)-r\left(t_0\right)$ yer değiştirme vektörüdür. t_0 anındaki hız;

$$V\left(t_0\right)=\lim_{t\to t_0}\frac{r\left(t\right)-r\left(t_0\right)}{t-t_0}=r^{'}\left(t_0\right) \text{ ve } \left\|V\left(t_0\right)\right\| \text{ hızın büyüklüğüdür.}$$

Ödev: $r\left(t\right)=2\left(t-\sin t\right)i+2\left(1-\cos t\right)j-0k$ verilsin.
a) Hız hangi zamanlarda sıfır olur?
b) İvmenin sıfır olduğu bir zaman var mıdır?

Tanım 5.4.5: $I\in\mathbb{R}$ bir aralık ve r, I üzerinde tanımlı bir vektör değerli fonksiyon olsun. Eğer I üzerinde sürekli türeve sahip ve de I'nın her bir t iç noktası için $r^{'}\left(t\right)\neq0$ ise r,I üzerinde "düzgün bir fonksiyondur" denir. O halde r'nin temsil ettiği eğri "düzgün eğri" demektir.

5.5 Uzay Eğrilerinin Uzunlukları

C düzgün bir eğri olmak üzere $r(t) = X(t)\,i + Y(t)\,j + Z(t)\,k$, $a \leq t \leq b$ olsun.

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{\left((X'(t))^2 + (Y'(t))^2 + (Z'(t))^2\right)} \\ &= \int_a^b \left\| r'(t) \right\| dt \end{aligned}$$

Örnek 16: $r(t) = 4\cos t i + 4\sin t j + 3tk$, $0 \leq t \leq 2\pi$ eğri parçasının uzunluğunu hesaplayınız.

Çözüm: $r'(t) = -4\sin t i + 4\cos t j + 3k \Longrightarrow \left\| r'(t) \right\| = \sqrt{16\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) + 9} = 5$
$L = \int_0^{2\pi} \left\| r'(t) \right\| dt = 5\int_0^{2\pi} dt = 10\pi$