Bölüm 1

Halkalar ve Althalkalar

Bu bölümde halka kavramı tanımlanıp bazı örnekler verilecektir. Halkaların temel özellikleri incelenecektir. Ayrıca althalka kavramı da ele alınıp bir karakterizasyonu verilecektir. Bu sayede bir halkanın altkümelerinin althalka olup olmayacağına karar vermek kolaylaşacaktır.

1.1 Halkalar

Tanım 1.1.1 $(R, +)$ *değişmeli bir grup ve* R *üzerinde "$\cdot$" çarpma işlemi tanımlı olsun. Eğer*

(1) R *de* $\cdot$ *işlemi birleşme özelliğine sahip,*

(2) R *de* $\cdot$ *işlemi* $+$ *üzerine soldan ve sağdan dağılma özelliğine sahip*

ise $(R, +, \cdot)$ *üçlüsüne bir* **halka** *denir.*

Uyarı 1.1.2 Genellikle "$(R, +, \cdot)$" halkası yerine "R halkası" ifadesi kullanılır. ♦

Tanım 1.1.3 $(R, +, .)$ *bir halka olsun.*

1. *Her* $x \in R$ *için* $e \cdot x = x \cdot e = x$ *olacak biçimde* $e \in R$ *varsa* e *ye* R *halkasının* **birimi** *denir ve* R *ye bir* **birimli halka** *adı verilir.*

2. *Her* $x, y \in R$ *için* $x \cdot y = y \cdot x$ *ise* R *ye bir* **değişmeli halka** *denir.*

Uyarı 1.1.4 R bir halka ve $x,\ y \in R$ olmak üzere $x + (-y)$ elemanı $x - y$ ile, $x \cdot y$ elemanı da xy ile gösterilir. Halkanın toplamaya göre birimi 0 ile gösterilir ve bu elemana **halkanın sıfırı** denir. Ayrıca birimli bir halkada birim eleman tektir. Birimli bir R halkasının birimi e yerine 1_R ile de gösterilebilir. ♦

Tanım 1.1.5 *R bir halka olsun. $C(R) = \{a \in R|$ her $b \in R$ için $ab = ba\}$ kümesine* **halkanın merkezi** *adı verilir.*

Bir R halkasının değişmeli olması için gerek ve yeter şart $C(R) = R$ olmasıdır.

Örnek 1.1.6 $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi, $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ve $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre birer birimli ve değişmeli halkadır. ▲

Örnek 1.1.7 $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ birimli ve değişmeli bir halkadır. ▲

Örnek 1.1.8 $n \in \mathbb{Z} \setminus \{\pm 1\}$ olmak üzere $n\mathbb{Z} = \{nx \mid x \in \mathbb{Z}\}$ kümesi tamsayıların bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halkadır. Bu halka değişmelidir fakat birimli değildir. ▲

Örnek 1.1.9 $M_2(\mathbb{Z})$ kümesi matrislerin bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halkadır. Bu halka birimlidir fakat değişmeli değildir. ▲

Örnek 1.1.10 $M_2(2\mathbb{Z})$ kümesi matrislerin bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halkadır. Bu halka ne birimli ne de değişmelidir. ▲

Tanım 1.1.11 *R ve S iki halka olmak üzere $R \times S$ kartezyen kümesi üzerinde toplama ve çarpma işlemleri sırasıyla*

$$(r_1, s_1) + (r_2, s_2) = (r_1 + r_2, s_1 + s_2)$$

$$(r_1, s_1) \cdot (r_2, s_2) = (r_1 r_2, s_1 s_2)$$

ile tanımlansın. Bu durumda $R \times S$ kümesi bir halka olup bu halkaya R ile S nin **direkt çarpımı** *denir.*

Tanım 1.1.12 *R birimli bir halka ve $1_R \neq 0_R$ olsun. $0_R \neq a \in R$ için $ab = ba = 1_R$ olacak şekilde bir $b \in R$ varsa b ye a nın* **çarpımsal tersi** *denir.*

Uyarı 1.1.13 Birimli bir R halkasında $0_R \neq a \in R$ elemanın çarpımsal tersi varsa tektir. $a \in R$ nin çarpımsal tersi a^{-1} ile gösterilir. ♦

Uyarı 1.1.14 Birimli bir R halkasının çarpmaya göre tersinir elemanlarının kümesi $U(R)$ ile gösterilsin. Bu durumda

(1) $U(R) \neq \emptyset$ dir.

(2) $0_R \notin U(R)$ dir.

(3) Her $a, b \in U(R)$ için $ab \in U(R)$ dir.

(4) $U(R)$ çarpma işlemine göre bir gruptur. ♦

Örnek 1.1.15 $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası için $U(\mathbb{Z}) = \{-1, 1\}$ dir. ▲

Örnek 1.1.16 $\mathbb{Z}_{10}$ halkası için $U(\mathbb{Z}_{10}) = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{7}, \overline{9}\}$ dir. ▲

Halkada İşlemlerin Bazı Özellikleri

Teorem 1.1.17 *R bir halka olsun. Her $a \in R$ için $0_R \cdot a = a \cdot 0_R = 0_R$ dır.*

Teorem 1.1.18 *R bir halka ve $x,\ y,\ z \in R$ olmak üzere*

(1) $(-x)y = -(xy)$

(2) $x(-y) = -(xy)$

(3) $(-x)(-y) = xy$

(4) $x(y - z) = xy - xz$

(5) $(x - y)z = xz - yz$

özellikleri sağlanır.

Tanım 1.1.19 *R bir halka, $2 \leq k \in \mathbb{Z}$ ve $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k,\ a_{k+1} \in R$ olsun.*

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1} &= (a_1 + a_2 + \ldots + a_k) + a_{k+1} \\ a_1 \cdot a_2 \ldots a_k \cdot a_{k+1} &= (a_1 \ldots a_k) \cdot a_{k+1} \end{aligned}$$

şeklinde ardışık olarak tanımlıdır.

Teorem 1.1.20 (Genelleştirilmiş Birleşme Özelliği) *R bir halka, $2 \leq n \in \mathbb{Z}$ ve $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n \in R$ olsun. Bu durumda $1 \leq m < n$ şartını sağlayan her $m \in \mathbb{Z}$ için*

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + \ldots + a_m) + (a_{m+1} + \ldots + a_n) &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n \\ (a_1 \cdot a_2 \ldots a_m) \cdot (a_{m+1} \ldots a_n) &= a_1 \cdot a_2 \ldots a_n \end{aligned}$$

dir.

Teorem 1.1.21 (Genelleştirilmiş Soldan ve Sağdan Dağılma Özelliği) *R bir halka $2 \leq n \in \mathbb{Z}$ ve $b,\ a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n \in R$ olsun. Bu durumda*

(1) $b \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = b \cdot a_1 + \ldots + b \cdot a_n$

(2) $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \cdot b \ = a_1 \cdot b + \ldots + a_n \cdot b$

dir.

Tanım 1.1.22 *R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer $a^2 = a$ oluyorsa a elemanına* **idempotent** *adı verilir.*

Örnek 1.1.23 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ halkasının idempotent elemanları $(0,0),\ (1,0),\ (0,1),\ (1,1)$ dir. ▲

Tanım 1.1.24 *R birimli bir halka olmak üzere R nin her elemanı idempotent ise R ye* **Boole halkası** *adı verilir.*

Örnek 1.1.25 $\mathbb{Z}_2$ bir Boole halkasıdır fakat $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ Boole halkası değildir. ▲

Teorem 1.1.26 *Her Boole halkası değişmelidir.*

1.2 Althalkalar

Tanım 1.2.1 *R bir halka ve $\emptyset \neq S \subseteq R$ olsun. Eğer S kümesi R nin işlemlerine göre halka şartlarını sağlarsa S ye R nin bir* **althalkası** *adı verilir.*

Uyarı 1.2.2 Değişmeli bir halkanın her althalkası değişmelidir fakat birimli bir halkanın bir althalkası birimli olmak zorunda değildir. ♦

Örnek 1.2.3 R bir halka olmak üzere $\{0\}$ ve R kümeleri R nin althalkalarıdır. ▲

Örnek 1.2.4 $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $n\mathbb{Z} = \{nx \mid x \in \mathbb{Z}\}$ kümesi $\mathbb{Z}$ nin bir althalkasıdır. Tek tamsayılar kümesi toplamaya göre kapalı olmadığından $\mathbb{Z}$ nin bir althalkası değildir. ▲

Örnek 1.2.5 $a,\ b \in \mathbb{Z}$ olsun. $a + ib$ kompleks sayısına **Gauss tamsayısı** denir. Bütün Gauss tamsayılarının kümesi $\mathbb{Z}[i]$ ile gösterilir ve bu küme $\mathbb{C}$ nin bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halkadır. Bu halkaya **Gauss tamsayılar halkası** denir. Diğer yandan $\mathbb{Q}(i) = \{a + ib|\ a,\ b \in \mathbb{Q}\}$ kümesi de $\mathbb{C}$ nin bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halkadır. Bu durumda $\mathbb{Z}[i]$ halkası $\mathbb{Q}(i)$ nin bir althalkası olur. ▲

Teorem 1.2.6 *R bir halka olsun. $\emptyset \neq S \subseteq R$ altkümesinin R nin bir althalkası olması için gerek ve yeter şart her $x,\ y \in S$ için $x - y,\ xy \in S$ olmasıdır.*

Örnek 1.2.7 $M_2(\mathbb{Z})$ nin boş kümeden farklı $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} :\ a,\ b \in \mathbb{Z} \right\}$ altkümesini göz önüne alalım. Her $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \in S$ için

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-c & 0 \\ 0 & b-d \end{bmatrix} \in S$$

ve

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac & 0 \\ 0 & bd \end{bmatrix} \in S$$

olduğundan S kümesi $M_2(\mathbb{Z})$ nin bir althalkasıdır. ▲