Bölüm 4

Halka Homomorfizmaları ve İzomorfizma Teoremleri

Bu bölümde herhangi iki halka arasında tanımlı "homomorfizma" adı verilen ve halka işlemlerini koruyan fonksiyonlar incelenecektir. Homomorfizmaların özellikleri araştırılacaktır ve bir homomorfizmanın çekirdeği kavramı tanımlanacaktır. Ayrıca halka yapılarını koruyan "izomorfizma" olarak isimlendirilen özel homomorfizmalar ve izomorfizma teoremleri de ele alınacaktır.

4.1 Halka Homomorfizmaları

Tanım 4.1.1 *R ve S iki halka, $f : R \longrightarrow S$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $a,\ b \in R$ için*

(1) $f(a+b) = f(a) + f(b)$,

(2) $f(ab) = f(a)f(b)$

oluyorsa f ye bir **halka homomorfizması** *adı verilir.*

Tanım 4.1.2 *R ve S iki halka, $f : R \longrightarrow S$ bir halka homomorfizması olmak üzere eğer*

- *f birebir ise f ye bir* **monomorfizma**,
- *f örten ise f ye bir* **epimorfizma**,
- *f birebir ve örten ise f ye bir* **izomorfizma**

denir. Eğer $f : R \longrightarrow S$ bir izomorfizma ise bu durumda r ile S ye **izomorf halkalar** *denir ve $R \cong S$ ile gösterilir. Özel olarak, f bir epimorfizma ise S ye R nin bir* **homomorfik görüntüsü** *adı verilir.*

Tanım 4.1.3 *R ve S iki halka, $f : R \longrightarrow S$ bir halka homomorfizması olsun.*

- *$Kerf = \{r \in R|\ f(r) = 0_S\}$ kümesine f nin* **çekirdeği**
- *$Imf = \{f(r)|\ r \in R\}$ kümesine f nin* **görüntü kümesi**

denir.

Örnek 4.1.4 $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\theta(a) = \overline{a}$ ile tanımlı $\theta : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ fonksiyonunu göz önüne alalım.

$$\begin{aligned} \theta(a+b) &= \overline{a+b} &&= \overline{a} + \overline{b} &&= \theta(a) + \theta(b) \\ \theta(a \cdot b) &= \overline{a \cdot b} &&= \overline{a} \cdot \overline{b} &&= \theta(a) \cdot \theta(b) \end{aligned}$$

olduğundan θ bir homomorfizmadır.

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\theta &= \{a \in \mathbb{Z} :\ \theta(a) = \overline{0}\} \\ &= \{a \in \mathbb{Z} :\ \overline{a} = \overline{0}\} \\ &= \{a \in \mathbb{Z} :\ a = nk\} \\ &= \{nk :\ k \in \mathbb{Z}\} \\ &= n\mathbb{Z}, \\ \mathrm{Im}\theta &= \{\theta(a) : a \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\overline{a} :\ a \in \mathbb{Z}\} \\ &= \mathbb{Z}_n \end{aligned}$$

dir. ▲

Örnek 4.1.5 $(\mathbb{Z}, +)$ ile $(3\mathbb{Z}, +)$ grupları izomorf olmasına rağmen halka olarak $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ile $(3\mathbb{Z}, +, \cdot)$ halkaları izomorf değildir. ▲

Halka Homomorfizmalarının Bazı Özellikleri

Teorem 4.1.6 *R ve S iki halka, $f : R \longrightarrow S$ bir halka homomorfizması olsun. Bu durumda*

(i) *$f(0_R) = 0_S$,*

(ii) *her $r \in R$ için $f(-r) = -f(r)$ dir.*

Teorem 4.1.7 *R ve S iki halka, $f : R \longrightarrow S$ bir halka homomorfizması olsun.*

(i) *Eğer I, R nin bir althalkası ise $f(I)$ de S nin bir althalkasıdır.*

(ii) *Eğer J, S nin bir althalkası ise $f^{-1}(J)$ de R nin bir althalkasıdır.*

Teorem 4.1.8 *R ve S iki halka, $f : R \longrightarrow S$ bir halka homomorfizması olsun.*

(i) *$Kerf$, R nin bir idealidir.*

(ii) *f nin birebir olması için gerek ve yeter şart $Kerf = \{0_R\}$ olmasıdır.*

Örnek 4.1.9 $f(\overline{a}) = 4\overline{a}$ ile tanımlı $f : \mathbb{Z}_6 \longrightarrow \mathbb{Z}_6$ homomorfizmasını ele alalım. $\mathrm{Ker}f = \{\overline{0}, \overline{3}\} \neq \{\overline{0}\}$ olduğundan f bir monomorfizma değildir. Ayrıca $\mathrm{Im}f = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} \neq \mathbb{Z}_6$ olduğundan f bir epimorfizma değildir. ▲

Örnek 4.1.10 F bir cisim, R bir halka ve $f : F \longrightarrow R$ bir halka homomorfizması olsun. Bu durumda f nin sıfır homomorfizması veya bir monomorfizma olduğunu gösterelim. $\mathrm{Ker}f = \{x \in F |\ f(x) = 0_R\}$, F nin bir ideali olup F bir cisim olduğundan $\mathrm{Ker}f = \{0_F\}$ veya $\mathrm{Ker}f = F$ dir. Eğer $\mathrm{Ker}f = \{0_F\}$ ise f fonksiyonu birebir olup f bir monomorfizmadır. Eğer $\mathrm{Ker}f = F$ ise her $x \in F$ için $f(x) = 0_R$ olup f sıfır homomorfizmasıdır. ▲

4.2 İzomorfizma Teoremleri

Teorem 4.2.1 *R bir halka ve R nin bir ideali I olsun. Bu durumda $\pi(r) = r + I$ şeklinde tanımlanan $\pi : R \longrightarrow R/I$ fonksiyonu bir epimorfizmadır. Bu epimorfizmaya* **doğal (kanonik) homomorfizma** *adı verilir.*

Teorem 4.2.2 (Birinci İzomorfizma Teoremi) *$f : R \longrightarrow S$ bir halka homomorfizması olmak üzere*

$$R/Kerf \cong Imf$$

dir.

Teorem 4.2.3 (İkinci İzomorfizma Teoremi) *R bir halka, K ve I da R nin idealleri olmak üzere*

$$K/(K \cap I) \cong (K + I)/I$$

dır.

Teorem 4.2.4 (Üçüncü İzomorfizma Teoremi) *R bir halka, K ve I da R nin idealleri ve $K \subseteq I$ olsun. Bu durumda*

$$(R/K)/(I/K) \cong R/I$$

dır.