Bölüm 6

Sıralı Tamlık Bölgeleri

Bu bölümde bir tamlık bölgesinin bazı şartları sağlayan bir altkümesi aracılığıyla tamlık bölgesi üzerinde bir sıralama tanımlayacağız ve bu sıralamanın özelliklerini inceleyeceğiz.

6.1 Sıralı Tamlık Bölgeleri ve Pozitif Elemanların Kümesi

Tanım 6.1.1 *D bir tamlık bölgesi olsun. Eğer D toplama ve çarpma işlemlerine göre kapalı ve her $x \in D$ için $x \in D^+$ ya da $x = 0_D$ ya da $-x \in D^+$ şartlarını sağlayan bir D^+ altkümesine sahipse D ye bir* **sıralı tamlık bölgesi** *adı verilir. Ayrıca D^+ kümesine de D nin* **pozitif elemanlarının kümesi** *denir.*

Örnek 6.1.2 $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ tamlık bölgeleri bilinen pozitif elemanlarından oluşan altkümeleri $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Q}^+$ ve $\mathbb{R}^+$ ile birer sıralı tamlık bölgesidir. ▲

Tanım 6.1.3 *D bir sıralı tamlık bölgesi ve $x,\ y \in D$ olsun. Eğer $x - y \in \mathbb{D}^+$ ise y elemanı x den* **küçüktür** *(x elemanı y den* **büyüktür***) denir ve $y < x$ veya $x > y$ şeklinde gösterilir.*

Önerme 6.1.4 *D bir sıralı tamlık bölgesi ve $x,\ y \in D$ olsun.*

(i) *$0 < x$ olması için gerek ve yeter şart $x \in D^+$ olmasıdır.*

(ii) *$x < 0$ olması için gerek ve yeter şart $-x \in D^+$ olmasıdır.*

(iii) *$0 < x$ ve $0 < y$ ise $0 < x + y$ dir.*

(iv) *$0 < x$ ve $0 < y$ ise $0 < xy$ dir.*

(v) *$x \in D$ için $x < 0$ ya da $x = 0$ ya da $0 < x$ dir.*

Teorem 6.1.5 *D bir sıralı tamlık bölgesi ve $x,\ y,\ z \in D$ olsun.*

(i) *Eğer $x < y$ ise $x + z < y + z$ dir.*

(ii) *Eğer $x < y$ ve $0 < z$ ise $xz < yz$ dir.*

(iii) *Eğer $x < y$ ve $y < z$ ise $x < z$ dir.*

(iv) *(Üç Hal Kuralı) $x < y$ ya da $x = y$ ya da $y < x$ dir.*

Teorem 6.1.6 *D bir sıralı tamlık bölgesi olsun. Bu durumda her $0 \neq x \in D$ için $x^2 \in D^+$ dır.*

Sonuç 6.1.7 *D bir sıralı tamlık bölgesi olsun. Bu durumda $1_D \in D^+$ dır.*

Örnek 6.1.8 $\mathbb{C}$ cismi bir sıralı tamlık bölgesi değildir. Bunu görmek için $\mathbb{C}$ nin bir sıralı tamlık bölgesi olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\mathbb{C}^+$ pozitif kompleks sayıların kümesi vardır. Dolayısıyla $1 \in \mathbb{C}^+$ olup Üç Hal Kuralı gereğince $-1 \notin \mathbb{C}^+$ dır. Diğer taraftan $0 \neq i \in \mathbb{C}$ için $i^2 = -1 \in \mathbb{C}^+$ olur, bu bir çelişkidir. Bu sebeple $\mathbb{C}$ cismi bir sıralı tamlık bölgesi olamaz. ▲

Tanım 6.1.9 *D bir sıralı tamlık bölgesi ve $\emptyset \neq S \subseteq D$ olsun. Eğer S nin boş olmayan her altkümesi en küçük elemana sahipse S ye bir* **iyi sıralı küme** *denir.*

Örnek 6.1.10 $\mathbb{Z}^+$ pozitif tamsayılar kümesinin boş olmayan her altkümesi bilinen $\leq$ bağıntısına göre her zaman en küçük elemana sahiptir. Bu sebeple $\mathbb{Z}^+$ iyi sıralıdır. ▲

Teorem 6.1.11 *D bir sıralı tamlık bölgesi ve D^+ iyi sıralı olsun. Bu durumda*

(i) *D^+ nın en küçük elemanı 1_D dir.*

(ii) *$D^+ = \{n1_D : \ n \in \mathbb{Z}^+\}$ dır.*

Teorem 6.1.12 *D bir sıralı tamlık bölgesi ve D^+ iyi sıralı ise $D \cong \mathbb{Z}$ dir.*